

Mathematik

Serie A - Lösungen

Prüfungsdauer: 120 Minuten

Max. Punktezahl: 100 Punkte

Bewertungshinweise:

Mehrfachlösungen sind nicht gestattet.

Als Resultate gelten nur eindeutig gekennzeichnete Zahlen, Mengen oder Sätze.

Die Diagramme müssen korrekt beschriftet sein.

Bei fehlenden Antwortsätzen oder Lösungsmengen werden Punkte abgezogen.

Bei den einzelnen Ausrechnungsteilschritten gilt allgemein:

1. Fehler: Abzug von 50 % der maximalen Punktezahl dieses Teilschritts

2. Fehler: 0 Punkte für diesen Teilschritt

Es gibt keine halben Punkte.

Ist bei grafischen Lösungen die zugrunde liegende Funktionsgleichung falsch, diese falsche Funktion jedoch korrekt gezeichnet, müssen die Punkte für die grafische Darstellung gegeben werden.

Als Grundlage gilt das Dokument „Mathematik: Hinweise zur Lösungsdarstellung“ vom November 2016, KKB Kanton Zürich.

Dieser Lösungs- und Bewertungsschlüssel darf nur von Mathematik-Lehrenden kaufmännischer Berufsschulen verwendet werden. Insbesondere darf er in späteren Jahren im Unterricht zu Übungszwecken nicht 1:1 kopiert und an Lernende abgegeben werden. Jede weitere Verwendung der Originalprüfung wie auch dieses Schlüssels bedarf der Bewilligung der Kommission Kaufmännische Berufsmatura, Kt. ZH. Kommerzielle Verwendung - auch nur auszugsweise - bleibt untersagt.

Notenskala

Punkte	0 – 4	5 – 14	15 – 24	25 – 34	35 – 44	45 – 54	55 – 64	65 – 74	75 – 84	85 – 94	95 – 100
Note	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6

Aufgabe 1

15 Punkte

Ein T-Shirt-Hersteller weiss, dass bei einer Produktion eines T-Shirts unabhängig von der Stückzahl fixe Kosten von CHF 1'200.00 entstehen. Die variablen Kosten betragen CHF 25.00 pro T-Shirt. Der Hersteller rechnet mit einem Erlös von CHF 35.00 pro T-Shirt.

a) Bestimmen Sie die Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion. (5)

Lösungsdetails		Punkte
$x = \text{Anzahl T-Shirts in Stück}$		
$y = \text{Kosten, Erlös, Gewinn in CHF}$		
$y_K = 25x + 1'200$		2
$y_E = 35x$		1
$y_G = 10x - 1'200$		2
Abzüge:		

b) Bei welcher Stückzahl wird die Gewinnschwelle erreicht? (2)

Lösungsdetails		Punkte
$25x + 1'200 = 35x \rightarrow x = 120$		2
<i>Die Gewinnschwelle wird bei 120 Stück erreicht.</i>		
Abzüge:	<i>Fehlender Antwortsatz</i>	-1

c) Stellen Sie den Sachverhalt (inklusive Gewinnschwelle) graphisch dar. (4)

Lösungsdetails		Punkte
		$y_K: 1$ $y_E: 1$ $y_G: 1$ $GS: 1$
Abzüge:	<i>Fehlende Beschriftungen</i>	<i>Max. -1</i>

- d) Der Hersteller möchte, dass die Gewinnschwelle bei 100 Stück liegt. Die Kosten können nicht gesenkt werden. Wie hoch müsste der Verkaufspreis pro T-Shirt sein? (2)

Lösungsdetails		Punkte
$\frac{100 \cdot 25 + 1'200}{100} = 37 \rightarrow \text{Der Verkaufspreis müsste CHF 37.00 betragen.}$		2
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	-1

- e) Die variablen Kosten pro Stück können aufgrund von Umstrukturierungen ab 150 Stück um 25 % gesenkt werden. Bestimmen Sie die neue Kostenfunktion ab 150 Stück. (2)

Lösungsdetails		Punkte
<i>Neue Steigung:</i> $25 \cdot 0.75 = 18.75$		1
$y = 18.75(x - 150) + 4'950$ ($x > 150$) oder $y = 18.75x + 2'137.5$ ($x > 150$)		1
Abzüge:	kein Abzug bei fehlendem Gültigkeitsbereich	

Aufgabe 2

8 Punkte

Ermitteln Sie die Definitions- und die Lösungsmenge für folgendes Gleichungssystem.

($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

$$(1) \frac{2}{x+2} - \frac{1}{y+5} = 2$$

$$(2) \frac{1}{x+2} - \frac{3}{2y+10} = 2$$

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D}_x = \mathbb{R} \setminus \{-2\} \quad \mathbb{D}_y = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$ $(1) \frac{2}{x+2} - \frac{1}{y+5} = 2$ $(2) -\frac{2}{x+2} + \frac{6}{2y+10} = -4$ <i>Additionsverfahren:</i> $\frac{2}{y+5} = -2$ $x = 0 \quad y = -6$ $\mathbb{L} = \{(0; -6)\}$		1, 1
		2
		2, 2
<i>Abzüge:</i>	<i>Fehlende oder nicht korrekte Lösungsmenge</i>	-1

Aufgabe 3

16 Punkte

Die Schmuck AG stellt neben hochwertigen Halsketten und Ringen auch Modeschmuck her. Der Betrieb will die Herstellung von zwei neuen Fingerringen in sein Fertigungsprogramm aufnehmen: das Modell Rosenrot (x) und das Modell Meeresblau (y). Der Wiederverkäufer garantiert dem Hersteller eine tägliche Abnahme von höchstens 1'000 Stück des Modells Rosenrot. Zudem wünscht er, dass die Anzahl Ringe «Rosenrot» zur Anzahl Ringe «Meeresblau» höchstens im Verhältnis 5 : 3 steht. Es können pro Tag entweder 1'600 Stück des Modells Rosenrot oder 1'300 Stück des Modells Meeresblau oder eine lineare Kombination von beiden hergestellt werden. Aus betriebswirtschaftlichen Gründen sollten höchstens doppelt so viele Modelle Meeresblau wie Modelle Rosenrot, insgesamt aber mindestens 900 Fingerringe pro Tag hergestellt werden. Der Gewinn soll maximal werden. Er beträgt für das Modell Rosenrot CHF 55.00 und für das Modell Meeresblau CHF 66.00 pro Stück.

- a) Erstellen Sie das lineare Programm und die Zielfunktion (**ohne Grafik**). (6)

Lösungsdetails		Punkte
$x = \text{Anzahl Ringe Modell Rosenrot}$		
$y = \text{Anzahl Ringe Modell Meeresblau}$		
(1)	$x \leq 1'000$	1
(2)	$\frac{x}{y} \leq \frac{5}{3}$	1
(3)	$\frac{x}{1'600} + \frac{y}{1'300} \leq 1$ oder $y \leq -\frac{13}{16}x + 1'300$	1
(4)	$y \leq 2x$	1
(5)	$x + y \geq 900$	1
Zielfunktion: $z = 55x + 66y$		1
Abzüge:		

- b) Durch Änderung der Marktsituation mussten das lineare Programm und die Zielfunktion wie folgt angepasst werden: (7)

(1) $x \leq 80$

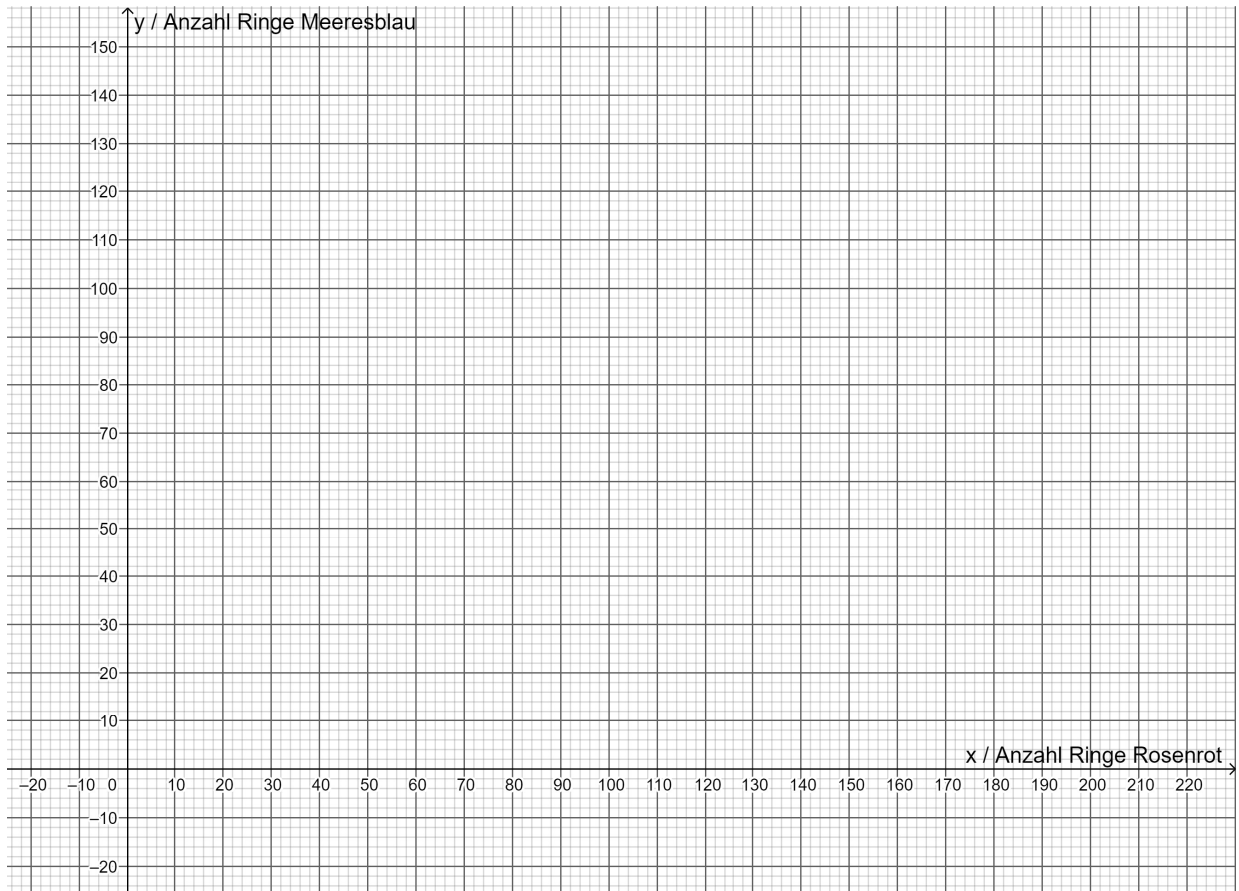
(2) $y \leq -\frac{7}{8}x + 140$

(3) $y \geq -\frac{2}{3}x + 80$

(4) $y \geq \frac{1}{4}x + 40$

Zielfunktion: $z = 84x + 60y$

Zeichnen Sie das entsprechende Planungspolygon mit Zielfunktion für einen maximalen Gewinn in das vorgegebene Koordinatensystem.



Lösungsdetails		Punkte
		<p>Geraden: 4</p> <p>Polygon: 1</p> <p>z_{max}: 1</p> <p>P_{max}: 1</p>
Abzüge:	Fehlende Beschriftungen (Geraden)	Max. -2

- c) Wie viele Ringe des Modells Rosenrot und des Modells Meeresblau müssen pro Tag nach den veränderten Bedingungen produziert werden, um einen maximalen Gewinn zu erzielen? (2)

Lösungsdetails		Punkte
$(1) = (2) \rightarrow P_{max}(80; 70)$ <i>Es müssen 80 Ringe Modell Rosenrot und 70 Ringe Modell Meeresblau produziert werden, um einen maximalen Gewinn zu erreichen.</i>		2
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	-1

- d) Wie hoch ist der maximale Gewinn? (1)

Lösungsdetails		Punkte
$z = 84 \cdot 80 + 60 \cdot 70 = 10'920$ <i>Der maximale Gewinn beträgt CHF 10'920.00.</i>		1
Abzüge:		

Aufgabe 4

6 Punkte

Ermitteln Sie die Definitions- und die Lösungsmenge für folgende Gleichung. Geben Sie auch an, für welche Werte von a die Gleichung definiert ist. ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$)

$$\frac{5x - 2a}{x} = \frac{2x}{a}$$

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge a \neq 0$		1, 1
$2x^2 - 5ax + 2a^2 = 0$		2
$(2x - a)(x - 2a) = 0$		
$x_1 = \frac{a}{2} \quad x_2 = 2a$		1, 1
$\mathbb{L} = \left\{ \frac{a}{2}, 2a \right\}$		
Abzüge:	Fehlende oder nicht korrekte Lösungsmenge	-1

Aufgabe 5

8 Punkte

Gegeben sind folgende Funktionsgleichungen:

$$f: y = x^2 - 4x - 12 \quad \text{und} \quad h: y = 2(x - 4)^2 + 10$$

- a) Bestimmen Sie allfällige Schnittpunkte der Funktion f mit der x -Achse. (2)

Lösungsdetails		Punkte
$N_1(-2; 0) \quad N_2(6; 0)$		1, 1
Abzüge:	Lösung nicht als Punkt dargestellt	Max. -1

- b) Bestimmen Sie die Scheitelpunkte beider Funktionen. (4)

Lösungsdetails		Punkte
$S_f(2; -16) \quad S_h(4; 10)$		2, 2
Abzüge:	Lösung nicht als Punkt dargestellt	Max. -1

- c) Die Parabel h wird an der x -Achse gespiegelt. Wie lautet die Funktionsgleichung der gespiegelten Parabel? (2)

Lösungsdetails		Punkte
$y = -2(x - 4)^2 - 10 \quad \text{oder} \quad y = -[2(x - 4)^2 + 10]$		2
Abzüge:		

Aufgabe 6

11 Punkte

- a) Andreas zahlt CHF 85'000.00 auf sein neu eröffnetes Konto ein. Wie viel muss er nach 7 Jahren zusätzlich auf sein Konto einzahlen, damit das Konto nach 12 Jahren einen Saldo von CHF 141'122.90 aufweist? In den ersten 5 Jahren beträgt der Zinssatz 1.5 %, danach 0.75 %. Runden Sie das Endresultat auf ganze Franken. (4)

Lösungsdetails		Punkte
<i>Nach 5 Jahren: $K_5 = 85'000 \cdot 1.015^5 = 91'569.14032$</i>		1
<i>Nach 7 Jahren: $K_7 = 91'569.14032 \cdot 1.0075^2 = 92'947.82819$</i>		1
<i>Nach Einzahlung $K_0 = \frac{141'122.90}{1.0075^5} = 135'947.81076$</i>		1
<i>Differenz: $135'947.81076 - 92'947.82819 = 42'999.98257$</i>		1
<i>Er muss zusätzlich CHF 43'000.00 einzahlen.</i>		
<i>Abzüge:</i>	<i>Fehlender Antwortsatz</i>	-1
	<i>Fehlende oder nicht korrekte Rundung</i>	-1

- b) Zu welchem Prozentsatz wird eine Maschine jährlich abgeschrieben, wenn sie neu CHF 520'000.00 gekostet hat und ihr Buchwert nach 12 Jahren noch CHF 79'359.10 beträgt? (3)

Lösungsdetails		Punkte
<i>$q = \sqrt[12]{\frac{K_n}{K_0}} = \sqrt[12]{\frac{79'359.10}{520'000}} = 0.855 \rightarrow p = 14.5$</i>		2, 1
<i>Die Maschine wird jährlich mit 14.5 % abgeschrieben.</i>		
<i>Abzüge:</i>	<i>Fehlender Antwortsatz</i>	-1

- c) Bea nimmt bei der Bank einen Kredit von CHF 50'000.00 auf. Sie hat mit der Bank die Vereinbarung getroffen, dass der Kredit in 10 gleich hohen nachschüssigen Raten bei einem Zinssatz von 8.5 % vollständig zurückgezahlt werden soll. Wie hoch ist eine Rate? (4)

Lösungsdetails		Punkte
<i>$50'000 \cdot 1.085^{10} = r \cdot \frac{1.085^{10} - 1}{0.085}$</i>		1, 1
<i>$r = 7'620.38525$</i>		2
<i>Eine Rate beträgt CHF 7'620.39.</i>		
<i>Abzüge:</i>	<i>Fehlender Antwortsatz</i>	-1

Aufgabe 7

10 Punkte

Eine 2-Terabyte Speicherkarte wird im Internet zu folgenden Preisen in CHF angeboten:

55 / 73 / 82 / 83 / 87 / 90 / 91 / 95 / 98 / 102 / 109 / 112 / 122 / 145 / 165

a) Ermitteln Sie die folgenden Werte und tragen Sie diese in die Tabelle ein. (7)

Mittelwert	
Median	
Modus	
Spannweite	
1. Quartil	
3. Quartil	
Interquartilsdifferenz	

Lösungsdetails		Punkte
<i>Mittelwert</i>	<i>100.6</i>	<i>1</i>
<i>Median</i>	<i>95</i>	<i>1</i>
<i>Modus</i>	<i>Kein</i>	<i>1</i>
<i>Spannweite</i>	<i>110</i>	<i>1</i>
<i>1. Quartil</i>	<i>83</i>	<i>1</i>
<i>3. Quartil</i>	<i>112</i>	<i>1</i>
<i>Interquartilsdifferenz</i>	<i>29</i>	<i>1</i>
<i>Abzüge:</i>		

b) Zu den Preisen aus Teilaufgabe a) kommen noch drei weitere Preise in CHF dazu.

67 / 128 / 132

Um wie viel ändert sich der Mittelwert der Preise absolut und prozentual? (3)

(Runden Sie auf zwei Dezimalen.)

Lösungsdetails		Punkte
<i>Mittelwert 1: CHF 100.60 und Mittelwert neu: CHF 102.00</i>		<i>1</i>
<i>Preisdifferenz absolut: $102.00 - 100.60 = 1.40$</i>		<i>1</i>
<i>Prozentuale Veränderung: 1.39 %</i>		<i>1</i>
<i>Die absolute Änderung beträgt CHF 1.40, die prozentuale 1.39 %.</i>		
<i>Abzüge:</i>	<i>Fehlender Antwortsatz</i>	<i>-1</i>

Aufgabe 8

10 Punkte

Ermitteln Sie die Definitions- und die Lösungsmengen für folgende Gleichungen. ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$)

a) $1 = x - \sqrt{7-x}$ (5)

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 7\}$		1
$x - 1 = \sqrt{7-x}$		
$(x - 1)^2 = 7 - x$		
$x^2 - 2x + 1 = 7 - x$		
$x^2 - x - 6 = 0$		2
$x_1 = -2 \quad x_2 = 3$		1, 1
-2 ist eine Scheinlösung $\rightarrow \mathbb{L} = \{3\}$		
Abzüge:	Fehlende oder nicht korrekte Lösungsmenge	-1

b) $8 \cdot 4^x = 2^{x+1}$ (5)

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$		1
$8 = \frac{2^{x+1}}{2^{2x}}$		
$2^3 = 2^{1-x}$		2
$x = -2$		2
$\mathbb{L} = \{-2\}$		
Abzüge:	Fehlende Lösungsmenge	-1

Aufgabe 9

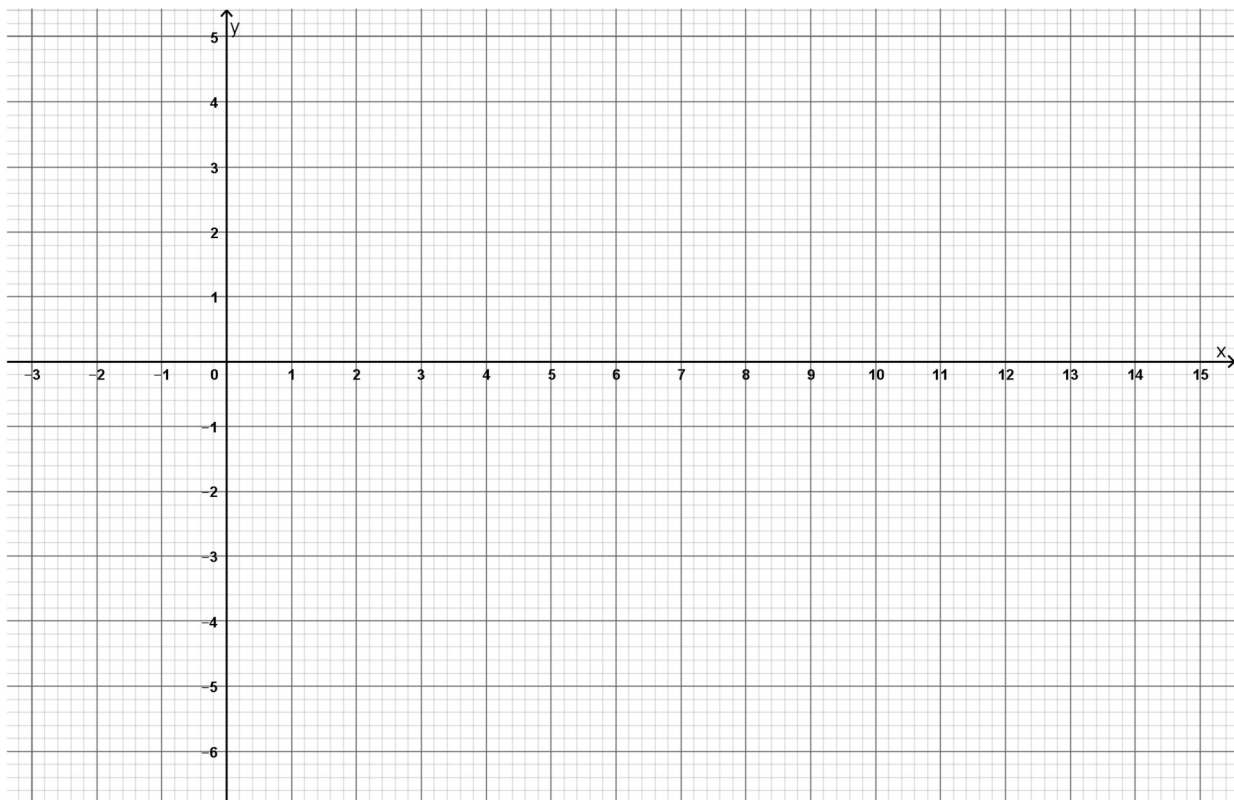
8 Punkte

Gegeben ist folgende Funktion $f: y = \log_2(x + 2) - 2$

- a) Berechnen Sie allfällige Schnittpunkte mit der x-Achse und der y-Achse. (3)

Lösungsdetails		Punkte
<p><i>Schnittpunkt mit der x-Achse:</i></p> $0 = \log_2(x + 2) - 2$ $2 = \log_2(x + 2)$ $2^2 = x + 2$ $x = 2 \rightarrow N(2; 0)$ <p><i>Schnittpunkt mit der y-Achse:</i></p> $y = \log_2(0 + 2) - 2$ $y = -1 \rightarrow S(0; -1)$		2
<i>Abzüge:</i>	<i>Lösung nicht als Punkt dargestellt</i>	1
		<i>Max. -1</i>

- b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f in das vorgegebene Koordinatensystem. Verwenden Sie die berechneten und mindestens drei weitere Punkte. (3)



Lösungsdetails		Punkte
		3
Abzüge:	Qualität der Graphen ungenügend	-1
	Fehlende Beschriftungen	-1
	Funktion schneidet $x = -2$	-1

c) Ermitteln Sie die Umkehrfunktion f^{-1} und stellen Sie diese in der Form $y = \dots$ dar. (2)

Lösungsdetails		Punkte
$x = \log_2(y + 2) - 2$ $x + 2 = \log_2(y + 2)$ $2^{x+2} = y + 2$ $y = 2^{x+2} - 2$		1
Abzüge:		1

Aufgabe 10

8 Punkte

Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich.

a) $\frac{m^2}{m^2 - 64} + \frac{4}{m + 8} + \frac{8}{8 - m}$ (4)

Lösungsdetails		Punkte
$= \frac{m^2 + 4(m - 8) - 8(m + 8)}{(m + 8)(m - 8)}$		2
$= \frac{m^2 - 4m - 96}{(m + 8)(m - 8)}$		1
$= \frac{m - 12}{m - 8}$		1
Abzüge:		

b) $\frac{a^{2x+3}}{a^{-1} \cdot b^{-2}} \cdot \left(\frac{a^{1-x}}{b}\right)^2$ (4)

Lösungsdetails		Punkte
$= \frac{a^{2x+3}}{a^{-1} \cdot b^{-2}} \cdot \frac{a^{2-2x}}{b^2}$		1
$= a^{2x+3+1+2-2x} \cdot b^{2-2}$		1, 1
$= a^6 \cdot b^0 = a^6$		1
Abzüge:		