Mathematik

Serie A - Lösungen

Prüfungsdauer: 120 Minuten

Max. Punktezahl: 100 Punkte

Bewertungshinweise:

Mehrfachlösungen sind nicht gestattet.

Als Resultate gelten nur eindeutig gekennzeichnete Zahlen, Mengen oder Sätze.

Die Diagramme müssen korrekt beschriftet sein.

Bei fehlenden Antwortsätzen oder Lösungsmengen werden Punkte abgezogen.

Bei den einzelnen Ausrechnungsteilschritten gilt allgemein:
1. Fehler: Abzug von 50 % der maximalen Punktzahl dieses Teilschritts
2. Fehler: 0 Punkte für diesen Teilschritt

Es gibt keine halben Punkte.

Ist bei grafischen Lösungen die zugrunde liegende Funktionsgleichung falsch, diese falsche Funktion jedoch korrekt gezeichnet, müssen die Punkte für die grafische Darstellung gegeben werden.

Als Grundlage gilt das Dokument „Mathematik: Hinweise zur Lösungsdarstellung" vom November 2016, KKB Kanton Zürich.

Notenskala

Punkte	0 – 4	5 – 14	15 – 24	25 – 34	35 – 44	45 – 54	55 – 64	65 – 74	75 – 84	85 – 94	95 – 100
Note	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6

Aufgabe 1

8 Punkte

Die Gewinnfunktion eines Produktes lautet: $y = -0.5x^2 + 150x - 6'250$

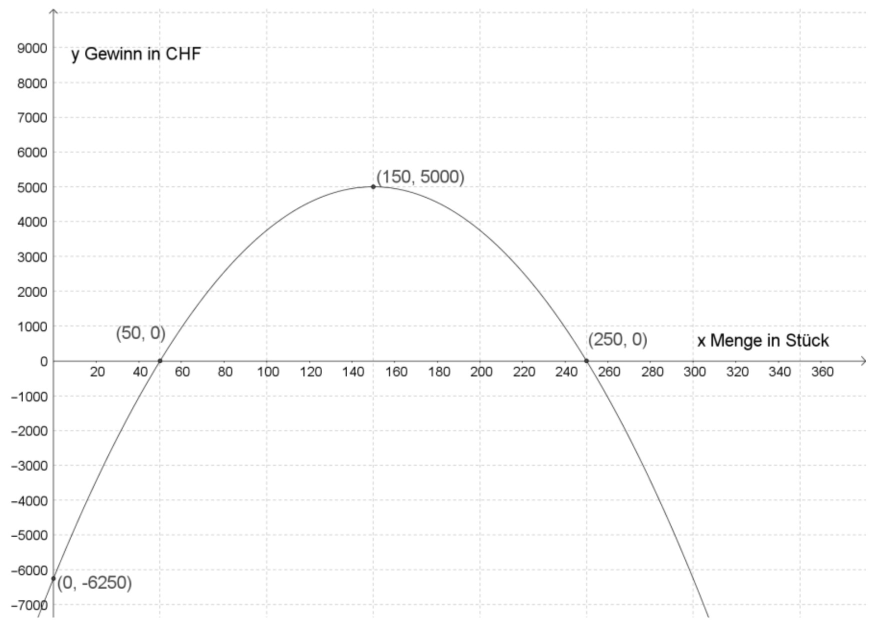
(x = Menge in Stück, y = Gewinn in CHF)

a) Für welche Stückzahlen ist mit Gewinn zu rechnen? (2)

b) Bei welcher Stückzahl ist der Gewinn maximal? (1)

c) Wie hoch ist der maximale Gewinn? (1)

d) Zeichnen Sie die Gewinnfunktion in ein geeignetes Koordinatensystem. (4)

Lösungsdetails	**Punkte**
a) $N_1(50; 0)$ $N_2(250; 0)$	*Je 1*
Zwischen 50 und 250 Stück ist mit Gewinn zu rechnen.	
b) *Bei 150 Stück wird der maximale Gewinn erreicht.*	*1*
c) *Der maximale Gewinn beträgt CHF 5'000.00.*	*1*
d) 	*4*

Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*
	Fehlende Beschriftungen	*Max. -2*
	Fixkosten nicht ersichtlich	*-1*

Aufgabe 2

14 Punkte

Auswanderer Maximilian Kuster hat 30‘000 m^2 Land auf einer wunderbaren Insel in der Karibik erworben. Er möchte zwei verschiedene Stellplatzarten für Camper anbieten: Variante Naturfeeling (x) und Variante Green-Comfort (y). 4‘000 m^2 braucht er für Wirtschaftsgebäude, Entsorgungsstationen, Sanitäranlagen, etc.

Er plant mindestens 250 Plätze, wobei das Verhältnis der Anzahl Plätze Naturfeeling zu Green-Comfort mindestens 3:2 sein soll. Ein Naturfeeling-Platz wird 120 m^2 benötigen, ein Green-Comfort hingegen 25 % mehr. Von den Naturfeeling-Plätzen möchte er aber höchstens dreimal so viele wie von den Green-Comfort-Plätzen erstellen.

Pro Saison rechnet er mit Gesamtkosten von CHF 3‘000.00 pro Naturfeeling-Platz und von CHF 4‘500.00 pro Green-Comfort-Platz. Sein Budget hierzu beträgt höchstens CHF 1‘200‘000.00. Dabei rechnet er pro Saison mit Einnahmen von CHF 4‘000.00 pro Naturfeeling-Platz und CHF 6‘000.00 pro Green-Comfort-Platz.

a) Herr Kuster möchte ermitteln, bei welcher Stellplatz-Kombination der Gewinn am höchsten ist. Erstellen Sie dafür das lineare Programm und formulieren Sie die Zielfunktion (**ohne Grafik**). (6)

Lösungsdetails	**Punkte**
x = Anzahl Stellplätze Naturfeeling in Stk. *y = Anzahl Stellplätze Green-Comfort in Stk.* $(x \geq 0, y \geq 0)$ *(1)* $x + y \geq 250$ *(2)* $\frac{x}{y} \geq \frac{3}{2}$ *oder* $2x \geq 3y$ *(3)* $120x + 150y \leq 26'000$ *(4)* $x \leq 3y$ *(5)* $3'000x + 4'500y \leq 1'200'000$ *Zielfunktion:* $z_{max} = 1'000x + 1'500y$	*Je 1*
Abzüge:	

b) Ein wesentlich kleinerer Campinganbieter auf der Südseite der Insel hat seine Plätze Summer (x, Anzahl in Stk.) resp. Flower (y, Anzahl in Stk.) ebenfalls gerechnet und die Grafik auf der Rückseite erhalten. Bestimmen Sie die vier <u>Un</u>gleichungen der Begrenzungsgeraden b, c, d, e.

Der Konkurrent rechnet mit einem Gewinn bei den Summer-Plätzen von CHF 1'200.00 und mit CHF 1'800.00 bei den Flower-Plätzen pro Saison. Formulieren Sie die Zielfunktion für den maximalen Gewinn pro Saison. (5)

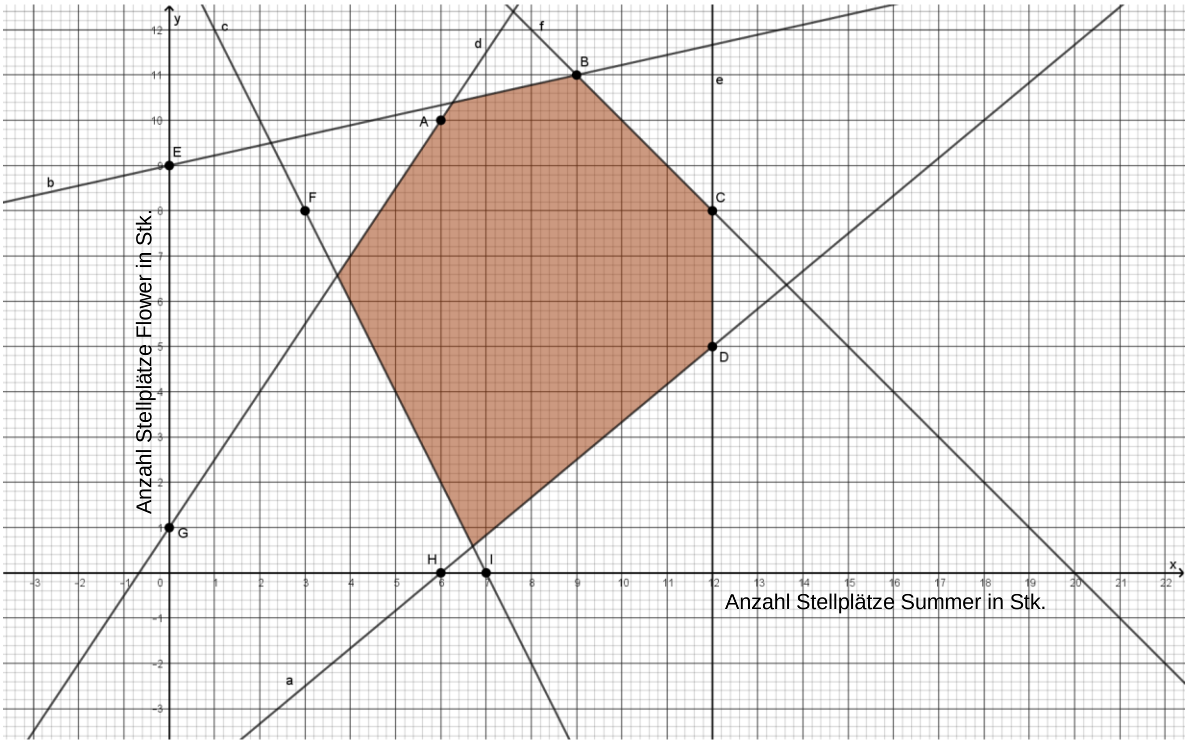
Gerade b ______________________________

Gerade c ______________________________

Gerade d ______________________________

Gerade e ______________________________

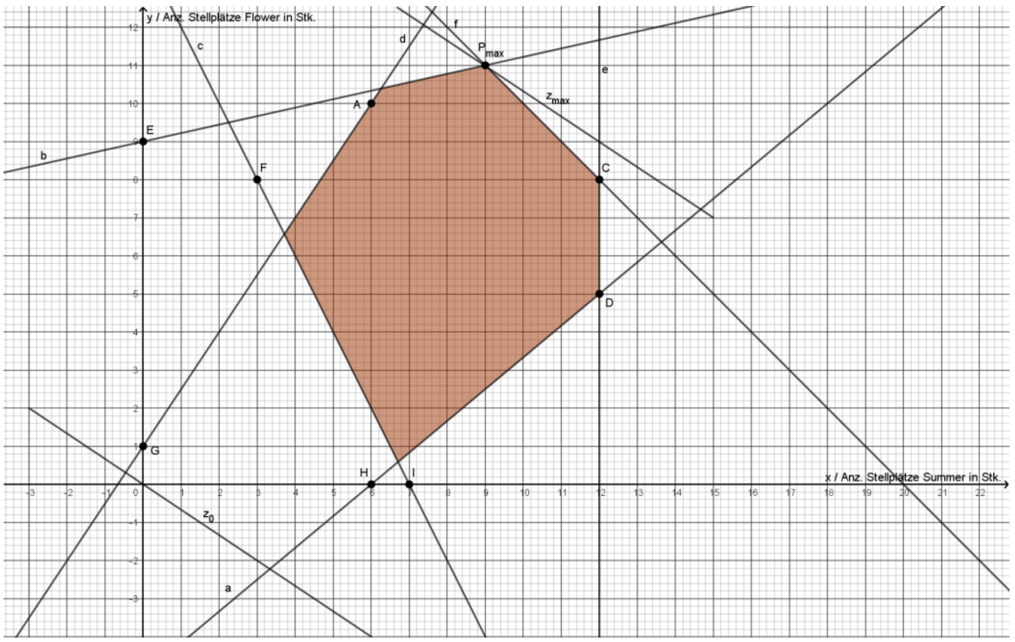
Zielfunktion: ______________________________



Lösungsdetails		Punkte
Gerade b	$y \leq \frac{2}{9}x + 9$	*5*
Gerade c	$y \geq -2x + 14$	*Je 1 P.*
Gerade d	$y \leq \frac{3}{2}x + 1$	
Gerade e	$x \leq 12$	
Zielfunktion:	$z = 1'200x + 1'800y$	

Abzüge:	*Falls keine Ungleichungen notiert, dann max. 2 P. Abzug* *Ungleichungen müssen komplett stimmen.*	*-1*

c) Zeichnen Sie die Zielfunktion in die obenstehende Grafik ein und bestimmen Sie die Anzahl Stellplätze jeder Sorte, sodass der Gewinn maximal wird (kann aus der Grafik abgelesen werden). Wie hoch ist dieser Gewinn? (3)



z korrekt eingezeichnet.	*1*
Der Lösungspunkt kann aus der Grafik abgelesen werden → $P_{max}(9; 11)$	*1*
Es müssten 9 Stellplätze Summer und 11 Stellplätze Flower sein.	
$z = 1'200 \cdot 9 + 1'800 \cdot 11 = 30'600$	
Der maximale Gewinn beträgt CHF 30'600.00.	*1*

Abzüge:	*Fehlende Beschriftung*	*-1*
	Fehlender Antwortsatz	*-1*

Aufgabe 3

15 Punkte

Peter möchte ein E-Bike mieten. Er hat zwei Anbieter A und B zur Auswahl.

A: Der Preis verläuft linear. 2 Stunden kosten CHF 40.00; 8 Stunden kosten CHF 85.00.

B: Die Grundgebühr beträgt CHF 30.00, darin enthalten sind die ersten beiden Stunden. Jede weitere Stunde kostet CHF 10.00.

Beide Anbieter rechnen genau die gemietete Zeit ab, nicht angefangene Stunden.

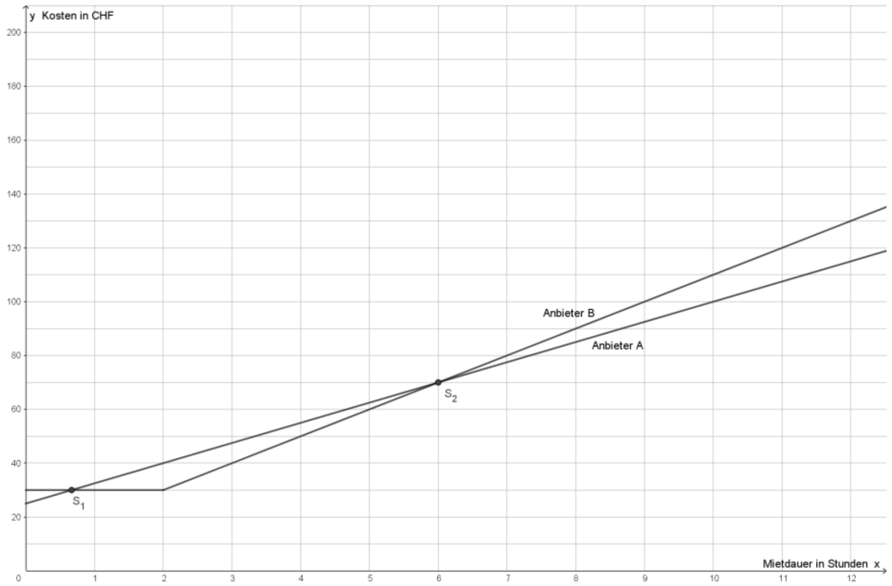
a) Definieren Sie die Variablen und ermitteln Sie die Kostenfunktionen für die beiden Anbieter. (5)

Lösungsdetails		**Punkte**
$x = \text{Mietdauer in Stunden}$		
$y = \text{Kosten in CHF}$		
$A: y = 7.5x + 25$		*2*
$B1: y_1 = 30\ (0 \leq x \leq 2)$		*1*
$B2: y_2 = 10x + 10\ (x > 2)$		*2*
Abzüge:	*Fehlende Variablendefinition*	*-1*
	Fehlende Grenzen	*-1*

b) Für welche Mietdauern ist Anbieter B günstiger als Anbieter A? (4)

Lösungsdetails		**Punkte**
$7.5x + 25 = 30 => x = \frac{2}{3} => 40\ min$		*2*
$7.5x + 25 = 10x + 10 => x = 6 => 6\ Stunden$		*2*
Für Mietdauern zwischen 40 Minuten und 6 Stunden ist B günstiger.		
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

c) Stellen Sie den Sachverhalt graphisch dar. (3)

Lösungsdetails		**Punkte**
		*y_A: 1* *y_{B1}: 1* *y_{B2}: 1*
Abzüge:	*Fehlende Beschriftungen*	*-1*

d) Anbieter B möchte bei 7 Stunden gleich teuer sein wie Anbieter A. Dabei soll die Pauschale bis zwei Stunden beibehalten werden. Bestimmen Sie die neue Kostenfunktion. (3)

Lösungsdetails		**Punkte**
$7.5 \cdot 7 + 25 = 77.5, => (77.5 - 30) : (7 - 2) = 9.5$ $y = 9.5(x - 2) + 30$ *oder* $y = 9.5x + 11$		*2* *1*
Abzüge:		

Aufgabe 4

16 Punkte

a) Ein Auto hat heute einen Wert von CHF 80'000.00. Das Auto wird pro Jahr um 30 % degressiv abgeschrieben.

a1) Wie hoch ist der Wert des Autos nach 5 Jahren? (2)

a2) Wie lange dauert es, bis der Wert des Autos noch CHF 1’000.00 beträgt? (Runden Sie auf 2 Dezimalen.) (3)

Lösungsdetails		**Punkte**
$80'000\left(1-\frac{30}{100}\right)^5 = 13'445.6$ *Der Wert des Autos beträgt CHF 13’445.60.* $80'000\left(1-\frac{30}{100}\right)^x = 1'000 \quad => \quad x = 12.29$ *Nach 12.29 Jahren beträgt der Wert des Autos noch CHF 1’000.00.*		*1, 1* *2, 1*
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

b) Peter hat ein Kapital zu einem Zinssatz von 2 % angelegt. Nach 4 Jahren wird eine Einzahlung von CHF 4'500.00 gemacht. Nach weiteren drei Jahren ist das Endkapital doppelt so gross wie das Anfangskapital. Definieren Sie die Variable und bestimmen Sie das Anfangskapital. (4)

Lösungsdetails		**Punkte**
x = Anfangskapital in CHF $\mathrm{x} \cdot 1.02^7 + 4'500 \cdot 1.02^3 = 2\mathrm{x}$ $x = \dfrac{4'500 \cdot 1.02^3}{2 - 1.02^7} = 5'609.486$ *Das Anfangskapital betrug CHF 5’609.49.*		 *2* *2*
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz* *Falsche oder fehlende Rundung*	*-1* *-1*

c) Sonja zahlt am Ende jedes Jahres einen Beitrag von CHF 5'000.00 zur Altersvorsorge bei einer Lebensversicherung ein. Das Kapital wird zu 2.5 % verzinst.

c1) Wie viel Geld hat Sonja nach 10 Jahren auf ihrem Konto? (3)

Lösungsdetails		**Punkte**
$R_n = 5'000 \cdot \frac{1.025^{10}-1}{0.025}$		*1*
$R_n = 56'016.909$		*2*
Nach 10 Jahren hat sie CHF 56'016.91 auf dem Konto.		
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*
	Falsche oder fehlende Rundung	*-1*

c2) Nach wie vielen ganzen Jahren wird sie erstmals CHF 250'000.00 besitzen? (4)

Lösungsdetails		**Punkte**
$250'000 = 5'000 \cdot \frac{1.025^{n}-1}{0.025}$		*2*
$n = 32.84$		*2*
Es wird 33 Jahre dauern.		
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*
	Falsche oder fehlende Rundung	*-1*

Aufgabe 5

12 Punkte

Ermitteln Sie die Definitions- und die Lösungsmenge für folgende Gleichungen. ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$)

a) $x = \sqrt{x+1} + 5$ (5)

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \vert x \geq -1\}$ $x - 5 = \sqrt{x+1}$ $(x-5)^2 = x + 1$ $x^2 - 10x + 25 = x + 1$ $x^2 - 11x + 24 = 0$ $x_1 = 3 \qquad x_2 = 8$ *3 ist eine Scheinlösung* $\rightarrow \mathbb{L} = \{8\}$		*1* *2* *1, 1*
Abzüge:	*Fehlende oder nicht korrekte Lösungsmenge*	*-1*

b) $log_{12}(x-2) + log_{12}(x+2) = 1$ (4)

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ $(x-2)(x+2) = 12^1$ $x^2 = 16$ $x_1 = -4 \qquad x_2 = 4 \qquad \mathbb{L} = \{4\}$		*1* *1* *1, 1*
Abzüge:	*Fehlende oder nicht korrekte Lösungsmenge*	*-1*

c) $5x^{\frac{5}{2}} = 160$ (3)

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$ $x = 32^{\frac{2}{5}}$ $x = 4 \in \mathbb{D}$ $\mathbb{L} = \{4\}$		*1* *1* *1*
Abzüge:	*Fehlende Lösungsmenge*	*-1*

Aufgabe 6

13 Punkte

Die Lernenden der Gesamtschule eines Bergdorfes wurden nach der Dauer ihres Schulweges gefragt. Die vollständigen Antworten lauten (Angaben in Minuten):

10 / 10 / 10 / 15 / 20 / 20 / 20 / 20 / 20 / 20 / 25 / 25 / 30 / 30 / 30 / 40 / 45 / 90

a) Ermitteln Sie die folgenden Werte und füllen Sie die Tabelle aus. (8)

Modus	
Median	
Mittelwert	
Spannweite	
1. Quartil	
3. Quartil	

Lösungsdetails		Punkte
Modus	20	*1*
Median	20	*1*
Mittelwert	$\frac{480}{18} = 26.\overline{6}$	*1*
Spannweite	$90 - 10 = 80$	*1*
1. Quartil	$i_{Q1} = \frac{1}{4}(18+1) = \frac{1}{4}(19) = 4.75$ $Q_1 = 15 + 0.75 \cdot (20 - 15) = 18.75$	*2*
3. Quartil	$i_{Q3} = \frac{3}{4}(18+1) = \frac{3}{4}(19) = 14.25$ $Q_3 = 30 + 0.25 \cdot (30 - 30) = 30$	*2*
Abzüge:		

b) Streichen Sie jeweils den falschen Teil der folgenden Aussagen durch. (3)

- Es liegt eine rechtssteile/linkssteile Verteilung vor.
- Die Standardabweichung ist anfällig/nicht anfällig auf Ausreisser.
- Der Stichprobenumfang/Der Umfang der Grundgesamtheit beträgt hier 18.

Lösungsdetails	Punkte
• Es liegt eine ~~rechtssteile~~/linkssteile Verteilung vor.	*1*
• Die Standardabweichung ist anfällig/~~nicht anfällig~~ auf Ausreisser.	*1*
• ~~Der Stichprobenumfang~~/Der Umfang der Grundgesamtheit beträgt hier 18.	*1*
Abzüge:	

c) Der Wert von „90“ erwies sich bei einer Überprüfung als Fehler. Er sollte „50“ betragen. Welche der 6 Werte in der Tabelle von Aufgabe a) ändern sich? (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
Spannweite und Mittelwert		*1, 1*
Abzüge:		

Aufgabe 7

8 Punkte

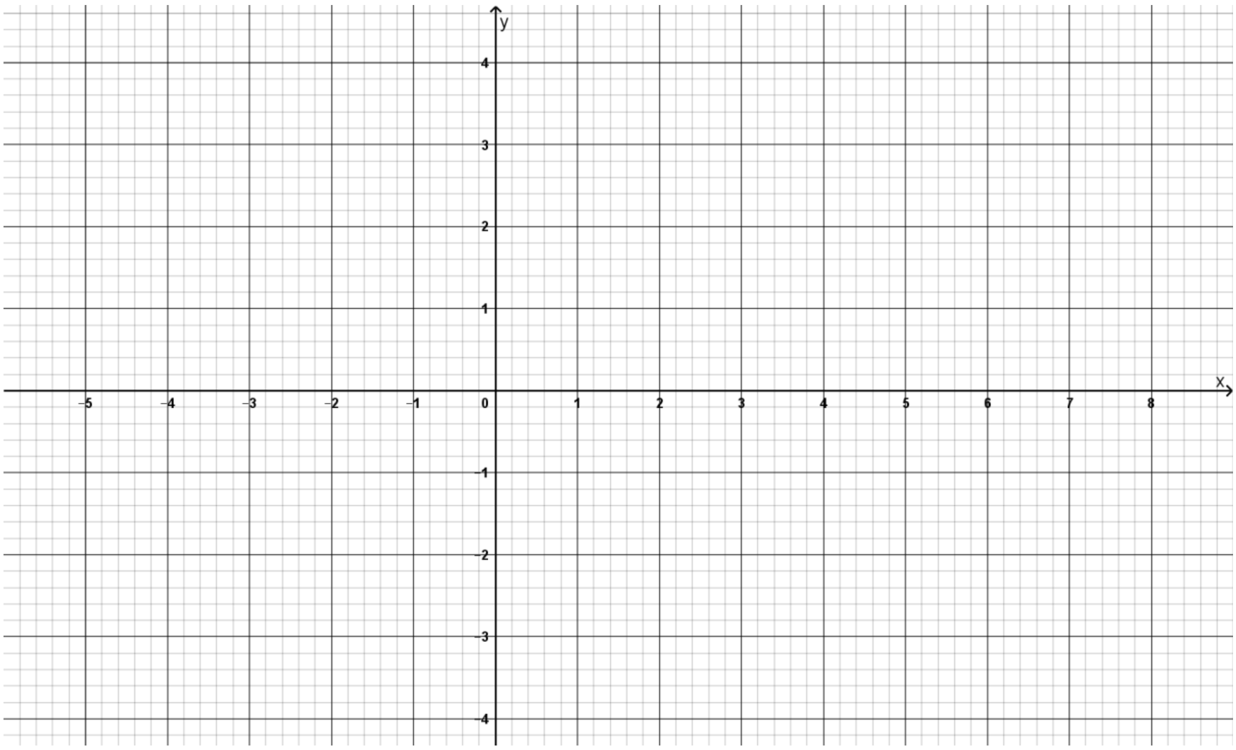
Gegeben ist folgende Funktion f ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$):

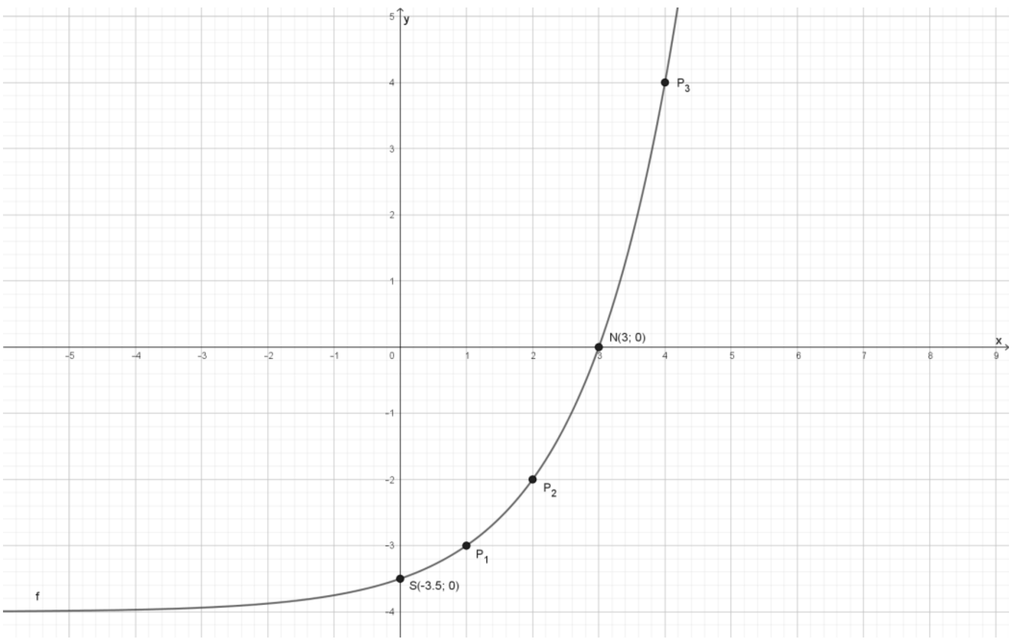
$$y = 2^{(x-1)} - 4$$

a) Berechnen Sie die Schnittpunkte mit der x-Achse und der y-Achse. (3)

Lösungsdetails	**Punkte**
Schnittpunkt mit der x-Achse: $0 = 2^{(x-1)} - 4$ $4 = 2^{(x-1)}$ $2^2 = 2^{(x-1)}$ $x = 3 \to N(3; 0)$	*2*
Schnittpunkt mit der y-Achse $y = 2^{(0-1)} - 4 = -3.5 \ \to S(0; -3.5)$	*1*
Abzüge: *Lösung nicht als Punkt dargestellt*	*-1*

b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f in das vorgegebene Koordinatensystem. (3)
(inklusive berechneter und mindestens drei zusätzlicher Punkte)



Lösungsdetails		**Punkte**
		*3*
Abzüge:	*Qualität des Graphen ungenügend*	*-1*
	Fehlende Beschriftungen	*-1*
	Funktion schneidet y = -4	*-1*

c) Ermitteln Sie die Umkehrfunktion f^{-1} und stellen Sie diese in der Form $y =$… dar. (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
$x = 2^{y-1} - 4$		
$x + 4 = 2^{y-1}$		
$log_2(x + 4) = y - 1$		*1*
$y = log_2(x + 4) + 1$		*1*
Abzüge:		

Aufgabe 8

8 Punkte

Für die Bodleian Library in Oxford gibt es zwei verschiedene Führungen, eine kurze und eine lange Tour. Von einer Schulklasse wählen 11 Lernende die lange Tour. Die anderen die kurze Tour. Die kurze Tour kostet £ 5.50. Die Kosten für alle Lernenden betragen £ 213.40. Leider wird in beiden Gruppen jeweils ein Lernender krank und kann nicht teilnehmen. Deshalb muss für beide Gruppen gesamthaft nur £ 198.00 bezahlt werden.

Wie viele Lernende sind in der gesamten Schulklasse und welcher Preis wird für die lange Tour berechnet?

Definieren Sie die Variablen und bestimmen Sie die Definitionsmengen. Erstellen Sie ein entsprechendes Gleichungssystem, ohne dieses zu lösen.

Lösungsdetails		**Punkte**
x = Anzahl Lernende in der Klasse		*1*
y = Preis der langen Tour in £		*1*
$\mathbb{D}_x = \mathbb{N},\ \mathbb{D}_y = \mathbb{Q}^+$		*1, 1*
$(1)\ \ (x-11)\cdot 5.5 + 11\cdot y = 213.40$		*2*
$(2)\ \ (x-12)\cdot 5.5 + 10\cdot y = 198 \quad oder\ \ (2)\ 5.5 + y = 15.4$		*2*
Es sind auch andere Variablendefinitionen und dementsprechend andere Gleichungssysteme möglich.		
Abzüge:	*Variablen müssen komplett richtig definiert werden.*	

Aufgabe 9

6 Punkte

Vereinfachen Sie die folgenden Terme soweit wie möglich. (3)

a) $\dfrac{\frac{b}{a^2-b^2}}{\frac{a}{a-b}-1}$

Lösungsdetails		Punkte
$\dfrac{b}{(a-b)(a+b)} \cdot \dfrac{(a-b)}{b}$		*2*
$= \dfrac{1}{a+b}$		*1*
Abzüge:		

b) $\dfrac{\sqrt[3]{x^4 \cdot \sqrt[2]{x^4}}}{\sqrt[4]{x \cdot x^7}}$ (3)

Lösungsdetails		Punkte
$x^{\frac{4}{3}} \cdot x^{\frac{4}{6}} \cdot x^{-\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{7}{4}}$		*1*
$= x^0 = 1$		*1, 1*
Abzüge:		