Mathematik

Serie 1a - Lösungen

Prüfungsdauer: 150 Minuten

Max. Punktezahl: 100 Punkte

Bewertungshinweise:

Mehrfachlösungen sind nicht gestattet.

Als Resultate gelten nur eindeutig gekennzeichnete Zahlen, Mengen oder Sätze.

Die Diagramme müssen korrekt beschriftet sein.

Bei fehlenden Antwortsätzen oder Lösungsmengen werden Punkte abgezogen.

Bei den einzelnen Ausrechnungsteilschritten gilt allgemein:
1. Fehler: Abzug von 50% der maximalen Punktzahl dieses Teilschritts
2. Fehler: 0 Punkte für diesen Teilschritt

Es gibt keine halben Punkte.

Ist bei grafischen Lösungen die zugrundeliegende Funktionsgleichung falsch, diese falsche Funktion jedoch korrekt gezeichnet, müssen die Punkte für die grafische Darstellung gegeben werden.

Als Grundlage gilt das Dokument „Mathematik: Hinweise zur Lösungsdarstellung“ vom 02.12.1998

Aufgabe 1

12 Punkte

a) Die Tageseinnahmen eines Kinderzirkus betrugen CHF 1'525.00. Eine Eintrittskarte für Erwachsene kostet CHF 8.50, eine für Kinder CHF 5.50. Wie viele Erwachsene und Kinder besuchten den Zirkus, wenn insgesamt 250 Besucher gezählt wurden? (6)

Lösungsdetails		**Punkte**
x: Anz. Erwachsene, y: Anz. Kinder		
$x + y = 250$		*1*
$8.5x + 5.5y = 1525$		*2*
x = 50, y = 200		*Var. 1: 2* *Var. 2: 1*
50 Erwachsene und 200 Kinder besuchten den Zirkus.		
Abzüge:	*Fehlende Variablendefinition*	*-1*
	Fehlender Antwortsatz	*-1*

b) Ermitteln Sie die Definitions- und die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems. $(\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ (6)

(1) $\frac{3}{\frac{x}{2}-2} - \frac{1}{y+3} = 0$

(2) $\frac{1}{\frac{x}{2}-2} + \frac{2}{2y+6} = 2$

Lösungsdetails		**Punkte**
$\mathbb{D}_x = \mathbb{R}\backslash\{4\},\ \mathbb{D}_y = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$		*2*
Erste Variable		*2*
Zweite Variable		*2*
$x = 8;\ y = -\frac{7}{3}$		
$\mathbb{L} = \{(8/-\frac{7}{3})\}$		
Abzüge:	*Lösungsmenge nicht korrekt oder fehlend*	*-1*

Aufgabe 2

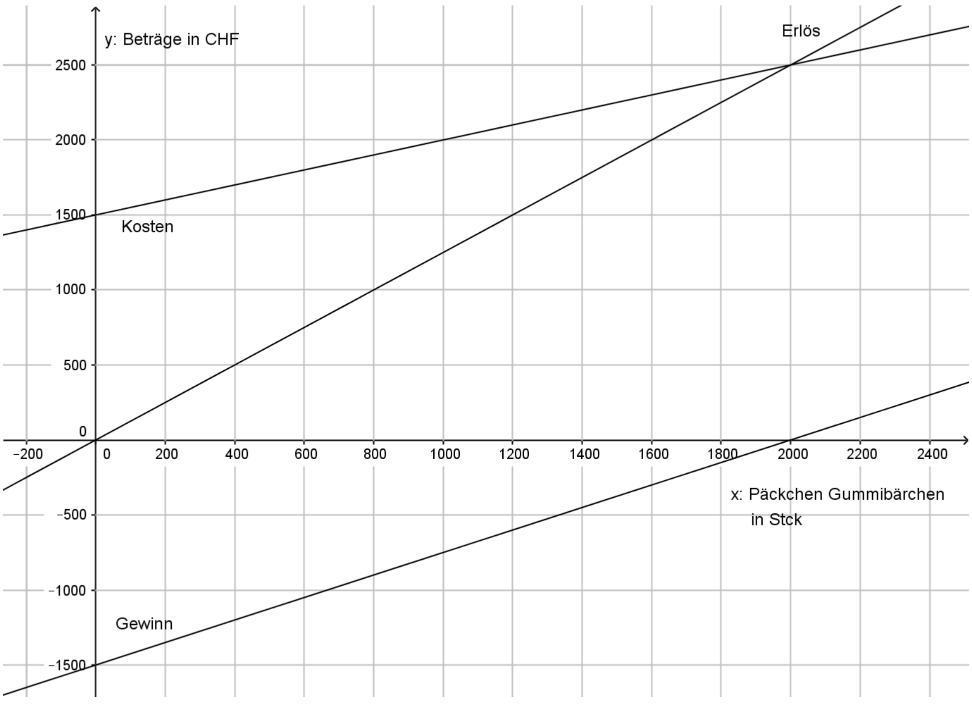
18 Punkte

Bei der Produktion von 250 Päckchen Gummibärchen fallen Gesamtkosten von CHF 1‘625.00 an, 400 Päckchen kosten insgesamt CHF 1‘700.00. Ein Päckchen wird für CHF 1.25 verkauft.

a) Bestimmen Sie die Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion. Berechnen Sie ebenfalls die Gewinnschwelle. (7)

Lösungsdetails		**Punkte**
Kosten: $y_K = 0.5x + 1'500$		*3*
Erlös: $y_E = 1.25x$		*1*
Gewinn: $y_G = 0.75x - 1'500$		*2*
Gewinnschwelle: $1.25x = 0.5x + 1'500 \qquad x = 2'000$		*1*
Die Gewinnschwelle wird bei 2‘000 Päckchen Gummibärchen erreicht.		
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

b) Stellen Sie den Sachverhalt von Aufgabe 2a grafisch vollständig dar. (5)

Lösungsdetails		**Punkte**
		*K: 2* *E: 1* *G: 2*
Abzüge:	*Fehlende oder unvollständige Achsenbeschriftung* *Fehlende oder unvollständige Geradenbeschriftung*	*-1* *-1*

c) Wie viele Päckchen Gummibärchen müssen produziert und verkauft werden, damit ein Gewinn von CHF 3‘000.00 erwirtschaftet wird? (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
Gewinn: $3‘000 = 0.75x - 1‘500$		*1*
$x = 6‘000$		*1*
Es müssen 6‘000 Päckchen hergestellt und verkauft werden.		
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

d) Neu möchte der Betrieb die Gewinnschwelle bereits bei 1‘200 Päckchen erreichen. Zu welchem Preis muss ein Päckchen Gummibärchen verkauft werden, damit dies erreicht wird? (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
Kosten: $y_K = 0.5x + 1‘500 = 600 + 1‘500 = 2‘100$		*1*
Erlös neu: $m \cdot 1‘200 = 2‘100 \quad m = 1.75$		*1*
Ein Päckchen muss für CHF 1.75 verkauft werden.		
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

e) Bei einer Produktion von mehr als 2‘500 Päckchen Gummibärchen können die Kosten optimiert werden. Die variablen Stückkosten betragen für die zusätzlichen Päckchen nur noch 80% der ursprünglichen Stückkosten. Bestimmen Sie die neue Kostenfunktion ab 2‘500 Päckchen. (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
$y_{K2} = 0.4(x - 2‘500) + 2'750$ *oder* $y_{K2} = 0.4x + 1'750$		*2*
Abzüge:		

Aufgabe 3

18 Punkte

Ein Bauer möchte aus Äpfeln und Birnen Süssmost pressen. Er muss mindestens 150 kg Äpfel und kann höchstens 180 kg Birnen verarbeiten. Er benötigt mindestens 320 Liter Süssmost, wobei pro 100 kg Obst 80 Liter Saft gepresst werden können. Damit der Most bekömmlich ist, soll er mindestens gleich viele Äpfel wie Birnen, höchstens aber 50% mehr Äpfel als Birnen enthalten.

Das Pressen von 100 kg Äpfeln kostet den Bauern CHF 120.00, für 100 kg Birnen beträgt sein Aufwand CHF 180.00.

a) Erstellen Sie das lineare Programm (x = Menge Äpfel in kg, y = Menge Birnen in kg) und formulieren Sie die Zielfunktion für die minimalen Kosten. **Ohne Grafik!** (7)

Lösungsdetails		**Punkte**
(1)	$x \geq 150$	*1*
(2)	$y \leq 180$	*1*
(3)	$x + y \geq 400$	*1*
(4)	$y \leq x$	*1*
(5)	$x \leq 1.5y$	*1*
(z)	$z = 1.2x + 1.8y$	*2*
Abzüge:		

b1) Ein Jahr später hat er auf das Kaufverhalten reagiert und seine Produktionsdaten angepasst. Das neue lineare Programm lautet nun: (7)

(1) $x \leq 240$

(2) $y \leq 360$

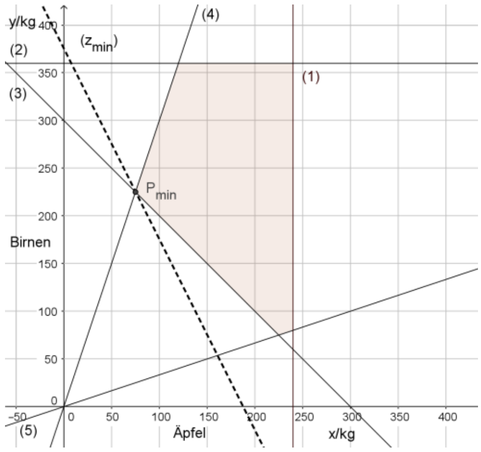
(3) $x + y \geq 300$

(4) $y \leq 3x$

(5) $x \leq 3y$

(z) $z = 1.6x + 0.8y$

Erstellen Sie ein entsprechendes Planungspolygon mit Zielfunktion für die minimalen Kosten.

Lösungsdetails	**Punkte**
	*Je Gerade 1* *Polygon 1* z_{min} *&* P_{min} *1*

Abzüge:	*Fehlende Beschriftungen (Achsen, Punkte, Gerade)*	*-1, max. -3*

b2) Wie viele Kilogramm von jeder Obstsorte muss der Bauer pressen, um die Kosten minimal zu halten? (2)

Lösungsdetails	**Punkte**
P_{min}: *(3) geschnitten mit (4)* ⇨ $-x + 300 = 3x$ ⇨ $x = 75 \rightarrow y = 225$ ⇨ *Er muss 75 kg Äpfel und 225 kg Birnen pressen.*	*2*

Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

b3) Wie viel kostet ihn 1 Liter Most bei der günstigsten Zusammensetzung? (2)

Lösungsdetails	**Punkte**
$z = 1.6 \cdot 75 + 0.8 \cdot 225 = 300$ *(für 300 kg, entspricht 240 Liter Most)*	*1*
Kosten pro Liter:	
300/240=1.25	*1*
Ein Liter Most kostet den Bauern CHF 1.25.	

Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

Aufgabe 4

4 Punkte

Ermitteln Sie die Definitions- und die Lösungsmenge der folgenden Gleichung. ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$)

$$\frac{5(2x-3)}{4x-3} = 3x - 5$$

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{4}\right\}$		*1*
$\frac{5(2x-3)}{4x-3} = 3x - 5$	$\mid \cdot\ (4x - 3)$	
$10x - 15 = (3x\ 5)(4x - 3)$		
$10x - 15 = 12x^2 - 29x + 15$		
$0 = 12x^2 - 39x + 30$		
$0 = 4x^2 - 13x + 10$		*1*
$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169-160}}{8}$		
$x_1 = 2\,;\ x_2 = \frac{5}{4}$		*2*
$\mathbb{L} = \left\{2; \frac{5}{4}\right\}$		
Abzüge:	*Keine oder falsche Lösungsmenge*	*-1*

Aufgabe 5

13 Punkte

Gegeben ist eine quadratische Funktion f_1: $y = -x^2 - x + 12$ und eine lineare Funktion f_2: $y = x + 9$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen beider Funktionen. (3)

Lösungsdetails		Punkte
Nullstellen f_1: $0 = -x^2 - x + 12$ *$N_1(-4 / 0)$ $N_2(3 / 0)$* *Nullstelle f_2: $N_3(-9 / 0)$*		2 1
Abzüge:		

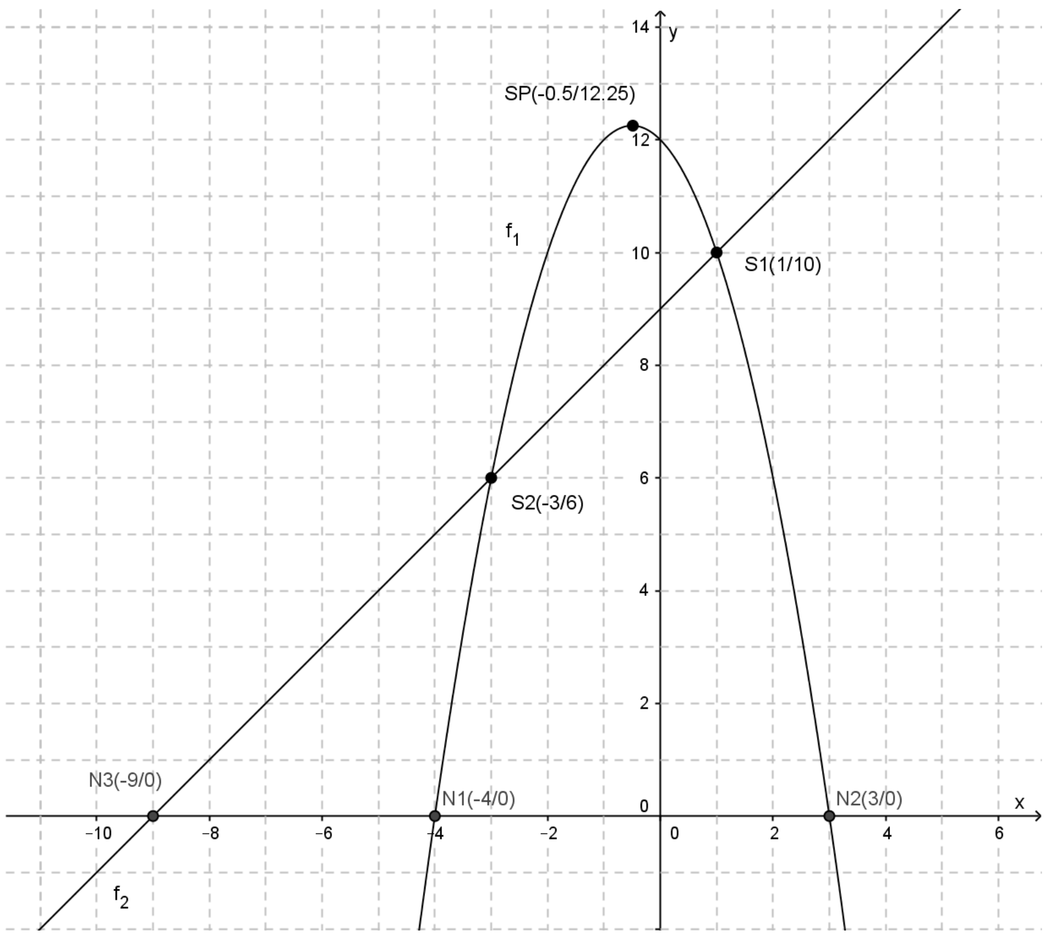
b) Berechnen Sie den Scheitelpunkt der quadratischen Funktion. (2)

Lösungsdetails		Punkte
Scheitelpunkt: S(-0.5 / 12.25)		2
Abzüge:	*Punktdarstellung formal nicht korrekt*	-1

c) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Funktionen. (4)

Lösungsdetails		Punkte
$x + 9 = -x^2 - x + 12$ $x^2 + 2x - 3 = 0$ $x_1 = 1$ $x_2 = -3$ $y_1 = 10$ $y_2 = 6$ $S_1(1/10)$ $S_2(-3/6)$		 2 2
Abzüge:	*Punktdarstellung formal nicht korrekt*	-1

d) Stellen Sie die beiden Funktionen grafisch dar und kennzeichnen Sie alle berechneten Punkte. (4)

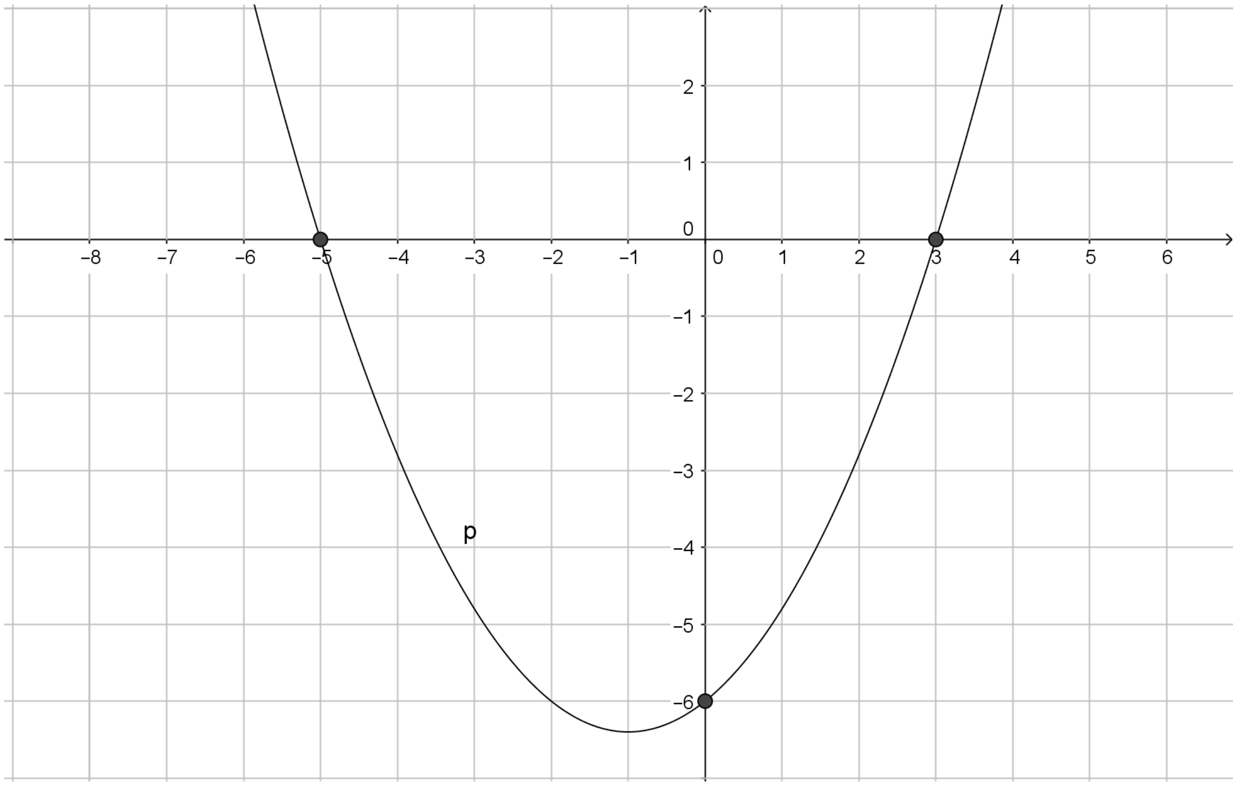
<table>
<tr><th colspan="2">Lösungsdetails</th><th>Punkte</th></tr>
<tr><td colspan="2">


</td><td>ff_1: 3
f_2: 1</td></tr>
<tr><td>Abzüge:</td><td>Fehlende Beschriftungen (Achsen, Punkte, Funktionen)</td><td>-1,
max. -2</td></tr>
</table>

Aufgabe 6

5 Punkte

Gegeben ist folgende Parabel p. Bestimmen Sie ihre Funktionsgleichung.



Lösungsdetails	Punkte
$y = ax^2 + bx - 6$	*1*
$N_1: 0 = a \cdot (-5)^2 + b \cdot (-5) - 6$	*1*
$N_2: 0 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 - 6$	*1*
$a = 0.4;\ b = 0.8$	*2*
$y = 0.4x^2 + 0.8x - 6$	
Abzüge: *Fehlende Funktionsgleichung*	*-1*

Aufgabe 7

6 Punkte

a) Ein KMU hat im Jahr 2009 sämtliche Büros für CHF 225‘000.00 neu möbliert. In der Steuererklärung für das Jahr 2015 beträgt der Buchwert des Mobiliars noch CHF 40‘045.00. Zu welchem degressiven Abschreibungssatz in % wird das Büromobiliar abgeschrieben? (3)

Lösungsdetails		Punkte
$40'045 = 225'000 \cdot q_A{}^6$		*1*
$q_A = 0.75$		*1*
$p = 25$		*1*
Der Abschreibungssatz von Büromobiliar beträgt 25%.		
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

b) Firmenautos werden steuerlich in der Regel mit 40% degressiv abgeschrieben. In einer Firma werden die Wagen ersetzt, wenn ihr Wert unter einen Zehntel des Anschaffungspreises gesunken ist. Wie lange werden die Firmenautos, auf ganze Jahre gerundet, durchschnittlich gefahren? (3)

Lösungsdetails		Punkte
$\frac{1}{10} = 1 \cdot 0.6^n$		*2*
$n \approx 4.51$		*1*
Die Wagen werden durchschnittlich 5 Jahre lang gefahren.		
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

Aufgabe 8

5 Punkte

Petra zahlte auf ihr Sparkonto zusätzlich zum bereits angelegten Guthaben Anfang 2010 CHF 3‘500.00 ein. Anfang 2013 zahlte sie nochmals CHF 3‘500.00 ein. Ende 2016 ist das Guthaben auf ihrem Sparkonto, welches während der gesamten Zeit zu 2% verzinst worden ist, auf CHF 12‘805.70 angewachsen.
Wie gross war der Kontostand vor der ersten Einzahlung von CHF 3‘500.00 am Anfang des Jahres 2010? (5)

Lösungsdetails		**Punkte**
x = Kontostand Anfang 2010 vor Einzahlung von CHF 3'500 in CHF		
$(x + 3'500) \cdot 1.02^7 + 3'500 \cdot 1.02^4 = 12'805.70$		*3*
$x \cdot 1.02^7 + 3'500 \cdot 1.027 + 3'500 \cdot 1.02^4 = 12'805.70$		
$x = 4'350$		*1*
Am Anfang des Jahres 2010 betrug das Guthaben CHF 4'350.00.		*1*
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

Aufgabe 9

12 Punkte

Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich.

a) $\frac{a^2+a-6}{a^2-4} : \left(\frac{2}{a+1} - \frac{1}{a+2}\right)$ (5)

Lösungsdetails		Punkte
$\frac{(a+3)(a-2)}{(a+2)(a-2)} : \frac{2(a+2)-1(a+1)}{(a+1)(a+2)}$		*2*
$= \frac{a+3}{a+2} \cdot \frac{(a+1)(a+2)}{a+3}$		*2*
$= a+1$		*1*
Abzüge:		

b) $\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^{-2} \cdot \sqrt[3]{\frac{b^2 \cdot \sqrt{b^8}}{a^6}}$ (4)

Lösungsdetails		Punkte
$= b^{-2}a \cdot b^{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{3}} a^{-2}$		*3*
$= \frac{1}{a}$		*1*
Abzüge:		

c) $log_a(28a) + log_a\left(\frac{a}{2}\right) - log_a\left(\frac{14}{a}\right)$ (3)

Lösungsdetails		Punkte
$log_a\left(\frac{28a \cdot a \cdot a}{2 \cdot 14}\right) = log_a(a^3)$		*2*
$= 3$		*1*
Abzüge:		

Aufgabe 10

7 Punkte

Ermitteln Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen. ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$)

a) $3^{x-2} = 27^{2-x}$ (3)

Lösungsdetails		**Punkte**
$3^{x-2} = 3^{6-3x}$ *(oder logarithmieren)*		*1*
$x - 2 = 6 - 3x$		*1*
$4x = 8$		
$x = 2$		*1*
$\mathbb{L} = \{2\}$		
Abzüge:	*Fehlende Lösungsmenge*	*-1*

b) $3 \cdot 6^{x-3} = 5^{2x}$ (4)

Lösungsdetails		**Punkte**
$log(3) + (x-3)\,log(6) = (2x)\,log(5)$		*1*
$log(3) - 3\,log(6) = (2x)\,log(5) - (x)\,log(6)$		*1*
$log(3) - 3\,log(6) = x(2\,log(5) - log(6))$		
$x = \frac{log(3) - 3log(6)}{2\,log(5) - log(6)} = -2.9967$		*2*
$x \approx -3$		
$\mathbb{L} = \{-3\}$		
Abzüge:	*Fehlende Lösungsmenge*	*-1*