Mathematik

Serie 1a - Lösungen

Prüfungsdauer: 150 Minuten

Max. Punktezahl: 100 Punkte

Bewertungshinweise:

Mehrfachlösungen sind nicht gestattet.

Als Resultate gelten nur eindeutig gekennzeichnete Zahlen, Mengen oder Sätze.

Die Diagramme müssen korrekt beschriftet sein.

Bei fehlenden Antwortsätzen oder Lösungsmengen werden Punkte abgezogen.

Bei den einzelnen Ausrechnungsteilschritten gilt allgemein:
1. Fehler: Abzug von 50% der maximalen Punktzahl dieses Teilschritts
2. Fehler: 0 Punkte für diesen Teilschritt

Es gibt keine halben Punkte.

Ist bei grafischen Lösungen die zugrunde liegende Funktionsgleichung falsch, diese falsche Funktion jedoch korrekt gezeichnet, müssen die Punkte für die grafische Darstellung gegeben werden.

Als Grundlage gilt das Dokument „Mathematik: Hinweise zur Lösungsdarstellung" vom 02.12.1998

Aufgabe 1

12 Punkte

a) Ermitteln Sie die Definitions- und Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems.
$\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (6)

$$(1) \quad \frac{x-2}{x+1} = \frac{y-1}{y+4}$$

$$(2) \quad \frac{3x-1}{2y-5} = \frac{1}{5}$$

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D}x = \mathbb{R}\backslash\{-1\},\ \mathbb{D}y = \mathbb{R}\backslash\{-4, 2.5\}$		*2*
$5x - 3y = 7$		*1*
$15x - 2y = 0$		*1*
$x = -0.4$		*1*
$y = -3$		*1*
$L = \{(-0.4/-3)\}$		
Abzüge:	*Lösungsmenge nicht korrekt oder fehlend*	*-1*

b) Eine Käserei stellt aus den Sorten Emmentaler und Appenzeller Käsemischungen für Fondue her. Besteht die Mischung aus 30% Emmentaler und 70% Appenzeller, so beträgt der Kilopreis der Mischung CHF 24.25. Mischt man die Sorten Emmentaler und Appenzeller im Verhältnis 2 : 3, wird der Kilopreis der Mischung um 25 Rappen günstiger. Wie hoch ist der Kilopreis der einzelnen Sorten? (6)

Lösungsdetails		Punkte
x: Kilopreis Emmentaler, y: Kilopreis Appenzeller		
$0.3x + 0.7y = 24.25$		*2*
$2x + 3y = 5 \cdot 24$		*2*
$x = 22.5,\ y = 25$		*2*
Der Emmentaler kostet CHF 22.50 pro kg, der Appenzeller CHF 25.00 pro kg.		
Abzüge:	*Kein Antwortsatz*	*-1*

Aufgabe 2

13 Punkte

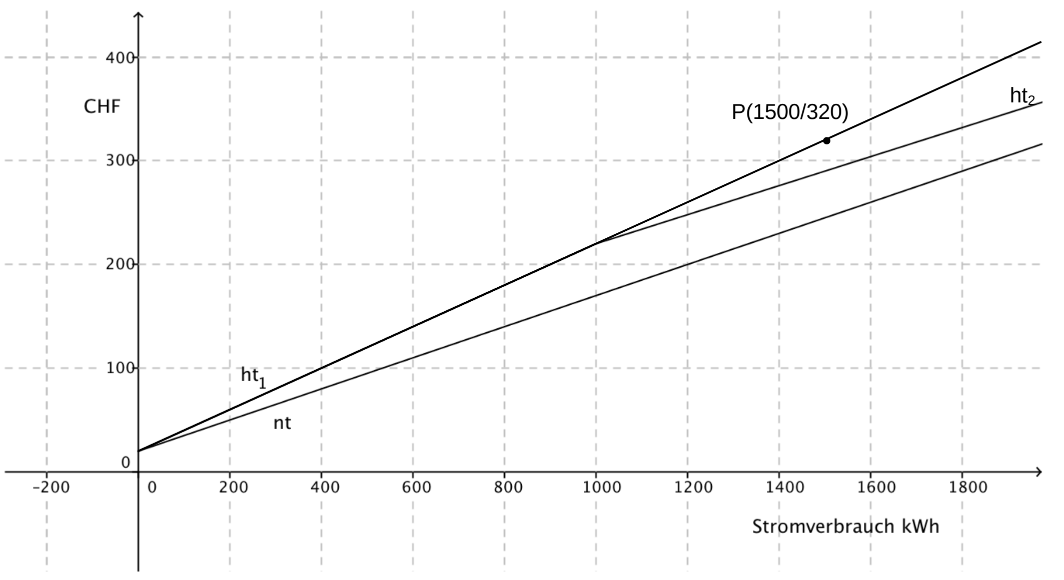
Die Elektrizitätswerke der Stadt Zürich (EWZ) legen für den Stromverbrauch von Privathaushalten folgende Preise fest:

- Hochtarif: Grundtarif CHF 20.00 pro Monat. Ein Verbrauch von 1500 Kilowattstunden (kWh) kostet insgesamt CHF 320.00.
- Der Niedertarif (in der Nacht ab 22 Uhr bis 6 Uhr morgens) wird ebenfalls mit einem Grundtarif von CHF 20.00 verrechnet, jedoch kostet jede verbrauchte Kilowattstunde bloss CHF 0.15.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen für die beiden Tarife, um den Preis in Abhängigkeit der verbrauchten Strommengen darzustellen. (4)

Lösungsdetails		**Punkte**
HT: $m = \frac{320-20}{1500} = 0.20$ $y = 0.2x + 20$ *NT:* $y = 0.15x + 20$		*2* *2*
Abzüge:		

b) Zeichnen Sie die beiden Funktionen ins gleiche Koordinatensystem für den Bereich von 0 bis 2000 kWh (0 ≤ x ≤ 2000) ein. (4)

Lösungsdetails		**Punkte**
		*Aufgabe b)* *2 für ht_1* *2 für nt* *Aufgabe d)* *1 für ht_2*
Abzüge:	*Fehlende Geradenbeschriftungen* *Fehlende Achsenbeschriftungen*	*-1* *-1*

c) Neu wird ab einem Hochtarif-Monatsverbrauch von 1000 kWh ein Rabatt von 20% auf alle zusätzlichen Kilowattstunden gewährt. Wie lautet die Funktionsgleichung für Strombezüge ab 1000 kWh? (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
$y = 0.16x + 60$ *(für $x \geq 1000$)*		*2*
Abzüge:		

d) Zeichnen Sie diesen Funktionsgraphen in das Diagramm von Teilaufgabe b) ein. (1)

e) Ein Haushalt erhält für insgesamt 680 kWh bezogenen Strom eine Monatsrechnung über CHF 135.60. Wie viele kWh wurden zum Niedertarif bezogen? Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe einer Gleichung. (Der Grundtarif wird nur einmal für Hoch- und Niedertarif zusammen verrechnet.) (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
$0.15x + 0.2(680 - x) = 135.60 - 20$		*1*
$x = 408$		*1*
Es wurden 408 kWh zum Niedertarif bezogen.		
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

Aufgabe 3

12 Punkte

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für x. ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$) (3)

$(x+5)(x-4) = x-4$

Lösungsdetails		Punkte
$x^2 + x - 20 = x - 4$		*1*
$x^2 - 16 = 0$		
$x_1 = -4,\ x_2 = 4$		*2*
L = {-4; 4}		
Abzüge:	*Keine Lösungsmenge*	*-1*

b) Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge für x. ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$) (6)

$$\frac{x^2+14x}{x^2+14x+49} - \frac{2x}{2x+14} = \frac{1}{4}$$

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-7\}$		*1*
$\frac{x^2+14x}{(x+7)(x+7)} - \frac{2x}{2(x+7)} = \frac{1}{4}$		*1*
$\frac{4(x^2+14x)}{4(x+7)(x+7)} - \frac{2x \cdot 2(x+7)}{2(x+7) \cdot 2(x+7)} = \frac{1(x+7)(x+7)}{4(x+7)(x+7)}$		*1*
$4x^2 + 56x - 4x^2 - 28x = x^2 + 14x + 49$		
$0 = x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2$		
$x_{1,2} = 7$		*2*
$\mathbb{L} = \{7\}$		*1*
Abzüge:	*Keine Lösungsmenge*	*-1*

c) Ein Auftrag kann von drei Auszubildenden in 4 Tagen erledigt werden. Wie viele Tage benötigt jeder Auszubildende allein, wenn der Auszubildende im ersten Lehrjahr doppelt so lange braucht wie der Auszubildende im dritten Lehrjahr und der Auszubildende im zweiten Lehrjahr 3 Tage länger benötigt als der Auszubildende im dritten Lehrjahr?

Stellen Sie eine entsprechende Gleichung auf, **ohne sie zu lösen**. (3)

Lösungsdetails		Punkte
x: Zeit, die der Auszubildende im 3. LJ benötigt (in Tagen) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$		*3*
Abzüge:	*Keine Variablendeklaration*	*-1*

Aufgabe 4

16 Punkte

Gegeben ist folgende quadratische Funktion:

$y_p = \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{4}x - 9$

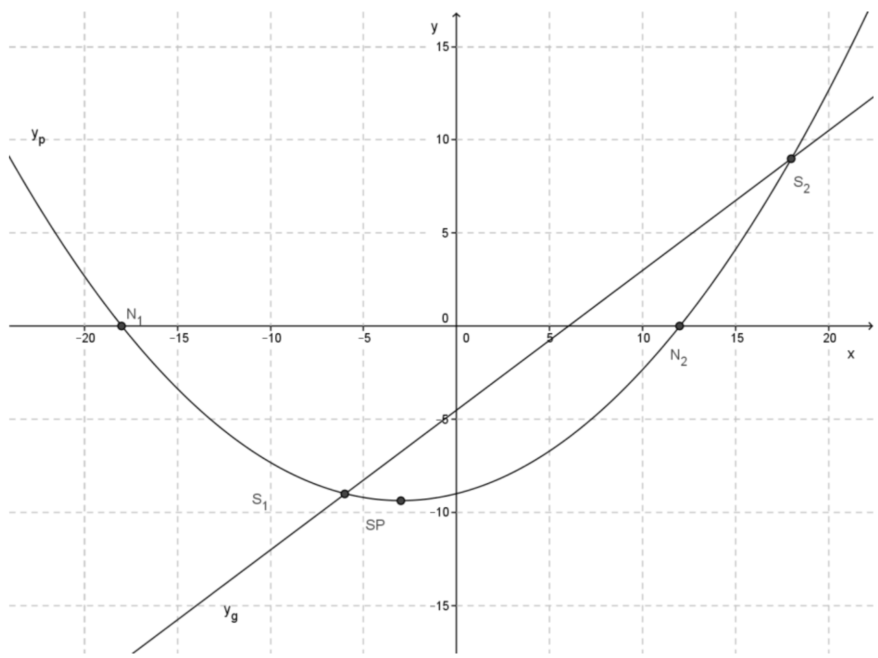
a) Bestimmen Sie die Nullstellen und den Scheitelpunkt. (4)

Lösungsdetails		**Punkte**
$N_1(12/0), N_2(-18/0)$		*2*
$S(-3/-9.375)$		*2*
Abzüge:	*Punkte nicht korrekt dargestellt*	*-1*

b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der quadratischen Funktion mit der Geraden
$y_g = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2}$. (4)

Lösungsdetails		**Punkte**
$\frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{4}x - 9 = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2}$		
$S_1(18/9), S_2(-6/-9)$		*je 2*
Abzüge:	*Punkte nicht korrekt dargestellt*	*-1*

c) Zeichnen Sie die beiden Funktionen in das abgebildete Koordinatensystem ein. (3)

Lösungsdetails		**Punkte**
		*p: 2* *g: 1*
Abzüge:	*Fehlende Beschriftungen*	*-1*

d) Eine Parabel schneidet die y-Achse bei y = -2 und die x-Achse bei $x_1 = 1$ und $x_2 = 14$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Parabel. (5)

Lösungsdetails		Punkte
$q: y = ax^2 + bx + c$ N_1 *und* N_2 *einsetzen* $c = -2$ $(1)\ 0 = a + b - 2 \qquad (1)\ 2 = a + b \qquad (1) - 28 = -14a - 14b$ $(2)\ 0 = 196a + 14b - 2 \qquad (2) 2 = 196a + 14b \qquad (2) \quad 2 = 196a + 14b$ $-26 = 182a \quad \rightarrow \quad a = -\frac{1}{7} \quad \rightarrow \quad b = 2 - a = 2 + \frac{1}{7} = \frac{15}{7}$ $q: y = -\frac{1}{7}x^2 + \frac{15}{7}x - 2$		 *1* *2* *2*
Abzüge:	*Keine Funktionsgleichung*	*-1*

Aufgabe 5

5 Punkte

Die zwei Geschwister Bettina und Andreas erben von einer Tante je CHF 15‘000.00. Bettina investiert ihren Betrag in ein Start-Up-Unternehmen, das ihr einen jährlichen Zinssatz von 4% zusichert. Andreas entscheidet sich für eine andere Anlage, die pro Jahr bloss 2% abwirft.

a) Wie gross ist Bettinas Kapital nach 10 Jahren? (1)

Lösungsdetails		Punkte
$K_n = 15000 \cdot 1.04^{10} = 22203.664$ *Nach 10 Jahren hat Bettina CHF 22'203.65.*		*1*
Abzüge:	*Kein Antwortsatz*	*-1*

b) Wie lange würde es dauern, bis Bettina mindestens doppelt so viel Kapital hat wie Andreas? (4)

Lösungsdetails		Punkte
$2 \cdot 15000 \cdot 1.02^n = 15000 \cdot 1.04^n$ *n = 35.7* *Nach 36 Jahren hat Bettina doppelt so viel wie Andreas.*		*2* *2*
Abzüge:	*Kein Antwortsatz*	*-1*

Aufgabe 6

7 Punkte

Herr Haas möchte ein Fahrzeug kaufen. Er kann sich zwischen einem neuen «Transporter» von VW zu einem Neupreis von CHF 37'400.00 und dem «Caddy» (ebenfalls von VW) nicht entscheiden.
Der Wert des «Caddy» nimmt jährlich um 19% des Vorjahreswertes ab, derjenige des «Transporters» jährlich um 26% des Vorjahreswertes. Der «Caddy» würde nach 3 Jahren nur noch CHF 9'856.00 kosten.

a) Berechnen Sie den Neupreis des «Caddy». (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
$K_0 = \frac{9856}{(1-0.19)^3} = 18'545.803$ *Der Caddy kostet neu CHF 18'545.80.*		*2*
Abzüge:	*Kein Antwortsatz*	*-1*

b) Drücken Sie den Wert des «Transporters» in Abhängigkeit der Nutzungsjahre durch eine Gleichung aus. (1)

Lösungsdetails		**Punkte**
n: Anzahl Jahre $K_n = 37400 \cdot (1-0.26)^n$		*1*
Abzüge:		

c) Nach wie vielen Jahren ist der «Transporter» noch die Hälfte seines Neupreises wert? (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
$\frac{37400}{2} = 37400 \cdot (1-0.26)^n$ *n = 2.3* *Der Transporter ist nach 2.3 Jahren nur noch die Hälfte wert.*		*1* *1*
Abzüge:	*Kein Antwortsatz*	*-1*

d) Herr Haas sieht noch einen weiteren Kombiwagen vom Hersteller Opel. Der Neupreis beträgt CHF 21'300.00. Ein 8-jähriger Gebrauchtwagen dieses Modells wird für CHF 4'800.00 verkauft. Berechnen Sie den degressiven Abschreibungssatz für dieses Fahrzeug. (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
$4800 = 21300 \cdot q^8$ *q = 0.83006* *Die jährliche Wertabnahme beträgt 17%.*		*1* *1*
Abzüge:	*Kein Antwortsatz*	*-1*

Aufgabe 7

18 Punkte

a) Ein Alpbetrieb möchte Milchwirtschaft mit Schafen (x) und Ziegen (y) betreiben. Es sollen mindestens 30 Ziegen sein. Weiter sollen mindestens ein Drittel der Tiere Schafe sein. Für eine optimale Beweidung darf es von den Schafen höchstens dreimal so viele haben wie von den Ziegen. Zusätzlich zum saftigen Alpengras braucht ein Schaf 200 g Ergänzungsfutter pro Tag, eine Ziege 150 g Ergänzungsfutter. Dabei stehen nicht mehr als 28 kg Ergänzungsfutter pro Tag zur Verfügung. Da auf Zäune weitgehend verzichtet werden soll, möchte der Älpler zum Schutz vor Wölfen Herdenschutzhunde einsetzen. Er rechnet mit einem Hund für 40 Tiere. Insgesamt kann er maximal vier Hunde einsetzen.

Bei einem Schaf wird mit 0.7 Liter Milch pro Tag gerechnet, bei einer Ziege mit 1.5 Liter. Für die Herstellung von Käse müssen pro Tag mindestens 100 Liter Milch produziert werden.

Die Milchmenge soll maximal werden.

Erstellen Sie das lineare Programm und die Gleichung der Zielfunktion. (7)

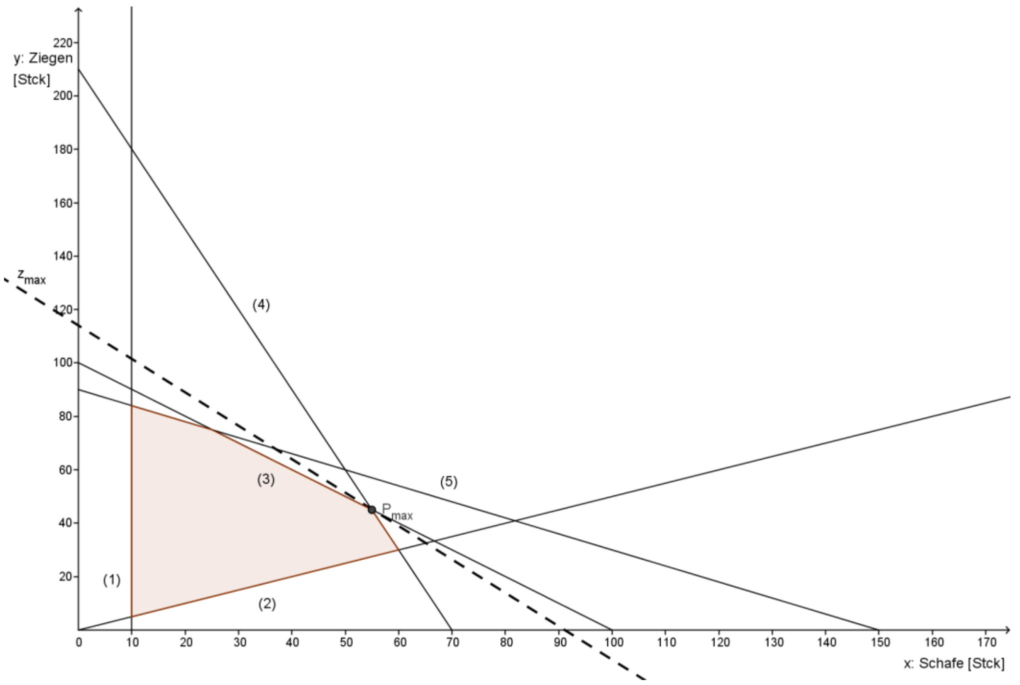
Lösungsdetails		**Punkte**
x: Anz. Schafe, y: Anz. Ziegen *(1)* $y \geq 30$ *(2)* $x \geq \frac{1}{3}(x+y)$ *(3)* $x \leq 3y$ *(4)* $200x + 150y \leq 28'000$ *(5)* $\frac{x+y}{40} \leq 4$ (6) $0.7x + 1.5y \geq 100$ $z_{max} = 0.7x + 1.5y$		*Je 1*
Abzüge:		

b) Für eine andere Alp sieht das lineare Programm folgendermassen aus:

(1) $x \geq 10$
(2) $y \geq 0.5x$
(3) $y \leq -x + 100$
(4) $y \leq -3x + 210$
(5) $y \leq -0.6x + 90$

Bei einem Schaf wird mit einem Gewinn von insgesamt CHF 250.00 und bei einer Ziege mit CHF 200.00 gerechnet.

Erstellen Sie ein entsprechendes Planungspolygon mit Zielfunktion für den maximalen Gewinn. (8)

Lösungsdetails		Punkte
		*je 1* z_{max} *1* *PP 1* P_{max} *1*
Abzüge:	*Fehlende Beschriftungen*	*-1*

c) Berechnen Sie, wie viele Schafe und Ziegen für den maximalen Gewinn gehalten werden müssen. (2)

Lösungsdetails		Punkte
$x = 55, y = 45$ *Es müssen 55 Schafe und 45 Ziegen gehalten werden.*		*2*
Abzüge:	*Kein Antwortsatz*	*-1*

d) Wie gross ist in diesem Fall der Gewinn? (1)

Lösungsdetails		Punkte
$250 \cdot 55 + 200 \cdot 45 = 22'750$ *Der Gewinn beträgt CHF 22'750.00.*		*1*
Abzüge:	*Kein Antwortsatz*	*-1*

Aufgabe 8

11 Punkte

Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich.

a) $\frac{2-x}{x^2-1}+\frac{3}{2x+2}-\frac{\frac{1}{2}}{x^2-x}$ (5)

Lösungsdetails	Punkte
$\frac{2x(2-x)}{2x(x+1)(x-1)}+\frac{3x(x-1)}{2x(x+1)(x-1)}-\frac{\frac{1}{2}\cdot 2(x+1)}{2x(x-1)(x+1)}$	*2*
$=\frac{4x-2x^2}{2x(x+1)(x-1)}+\frac{3x^2-3x}{2x(x+1)(x-1)}-\frac{(x+1)}{2x(x-1)(x+1)}$	*2*
$=\frac{4x-2x^2+3x^2-3x-x-1}{2x(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-1}{2x(x+1)(x-1)}=\frac{1}{2x}$	*1*
Abzüge:	

b) $\dfrac{\frac{2a}{b}\left(\frac{4c}{3d}+\frac{c}{2d}\right)}{\frac{3a}{b}\left(\frac{c}{6d}-\frac{2c}{d}\right)}$ (3)

Lösungsdetails	Punkte
$\dfrac{\frac{16ac}{6bd}+\frac{6ac}{6bd}}{\frac{3ac}{6bd}-\frac{36ac}{6bd}}$	*1*
$=\frac{11ac}{3bd}\cdot\left(-\frac{2bd}{11ac}\right)=-\frac{2}{3}$	*2*
Abzüge:	

c) $\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{p^4\cdot p^2}}\cdot\sqrt[4]{(p^4)^3}}{p^{\frac{3}{2}}}$ (3)

Lösungsdetails	Punkte
$\dfrac{\sqrt[4]{p^{\frac{6}{3}}\cdot p^{\frac{12}{4}}}}{p^{\frac{3}{2}}}$	*1*
$\dfrac{p^{\frac{2}{4}}\cdot p^{\frac{12}{4}}}{p^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{p^{\frac{14}{4}}}{p^{\frac{3}{2}}}=p^{\frac{4}{2}}=p^2$	*2*
Abzüge:	

Aufgabe 9

6 Punkte

Ermitteln Sie die Lösungsmengen für x der folgenden Gleichungen ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$).

a) $\log_x 128 = 7$ (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
$x^7 = 128$		*1*
$x = 2$		*1*
$\mathbb{L} = \{2\}$		
Abzüge:	*Keine Lösungsmenge*	*-1*

b) $log_3(0.9x) = 4$ (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
$3^4 = 0.9x$		*1*
$81 = 0.9x$		*1*
$\mathbb{L} = \{90\}$		
Abzüge:	*Keine Lösungsmenge*	*-1*

c) $16^x = 4^x \cdot 64$ (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
$\left(\frac{16}{4}\right)^x = 64$		*1*
$x \cdot lg(4) = lg(64)$		
$x = 3$		*1*
$\mathbb{L} = \{3\}$		
Abzüge:	*Keine Lösungsmenge*	*-1*