Mathematik

Serie 1a - Lösungen

Prüfungsdauer: 150 Minuten

Max. Punktezahl: 100 Punkte

Bewertungshinweise:

Mehrfachlösungen sind nicht gestattet.

Als Resultate gelten nur eindeutig gekennzeichnete Zahlen, Mengen oder Sätze.

Die Diagramme müssen korrekt beschriftet sein.

Bei fehlenden Antwortsätzen oder Lösungsmengen werden Punkte abgezogen.

Bei den einzelnen Ausrechnungsteilschritten gilt allgemein:
1. Fehler: Abzug von 50% der maximalen Punktzahl dieses Teilschritts
2. Fehler: 0 Punkte für diesen Teilschritt

Es gibt keine halben Punkte.

Ist bei grafischen Lösungen die zugrunde liegende Funktionsgleichung falsch, diese falsche Funktion jedoch korrekt gezeichnet, müssen die Punkte für die grafische Darstellung gegeben werden.

Als Grundlage gilt das Dokument „Mathematik: Hinweise zur Lösungsdarstellung“ vom 02.12.1998

Aufgabe 1

12 Punkte

a) Ermitteln Sie die Definitions- und Lösungsmenge ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$).

$\frac{6}{x-2} + 5 + x = \frac{2x^2+3x-8}{x-2}$

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$		1
$6 + 5(x-2) + x(x-2) = 2x^2 + 3x - 8$		
$-x^2 + 4 = 0$ bzw. $x^2 = 4$		2
$x_1 = -2$ $x_2 = 2$		2
$L = \{-2\}$		1
Abzüge:		

b) Zwei positive Zahlen unterscheiden sich um 50. Ebenso ist ihr Produkt um 50 grösser als ihre Summe. Bestimmen Sie die beiden Zahlen mit Hilfe einer Gleichung oder eines Gleichungssystems.

Lösungsdetails		Punkte
$x = kleinere\ Zahl$		
$x + 50 = grössere\ Zahl$		
$x + (x+50) + 50 = x(x+50)$ $\mathbb{D} = \mathbb{Q}^+$		2
$2x + 100 = x^2 + 50x$		
$0 = x^2 + 48x - 100$		2
$x_1 = 2$ $x_2 = -50$ *grössere Zahl: 2+50=52*		2
Die Zahlen sind 2 und 52.		
Abzüge:	*Keine Variablendeklaration*	-1
	Kein AS	-1

Aufgabe 2

13 Punkte

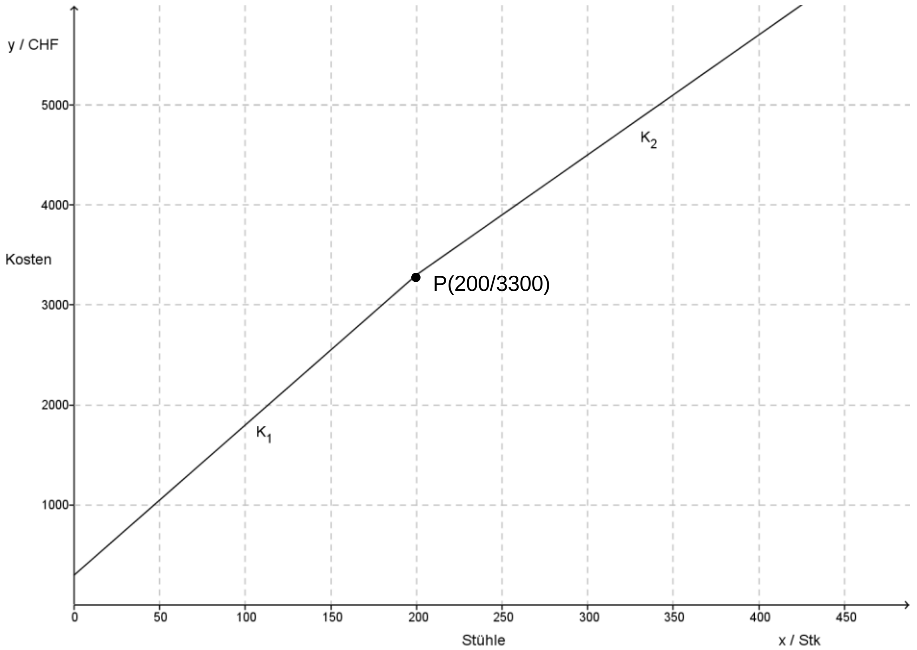
Die Abschlussklasse M4 organisiert einen Kinoabend für die gesamte Schule. Dafür muss die Klasse Stühle mieten. Eine Anmietung der Stühle kostet pauschal CHF 300.00. Darüber hinaus kostet jeder Stuhl CHF 15.00.

Falls mehr als 200 Stühle gemietet werden, wird der Klasse von der Stuhl-Vermietungsfirma ein Rabatt von 20% für die zusätzlichen Stühle gewährt.

a) Stellen Sie die Gleichungen der Kostenfunktion auf.

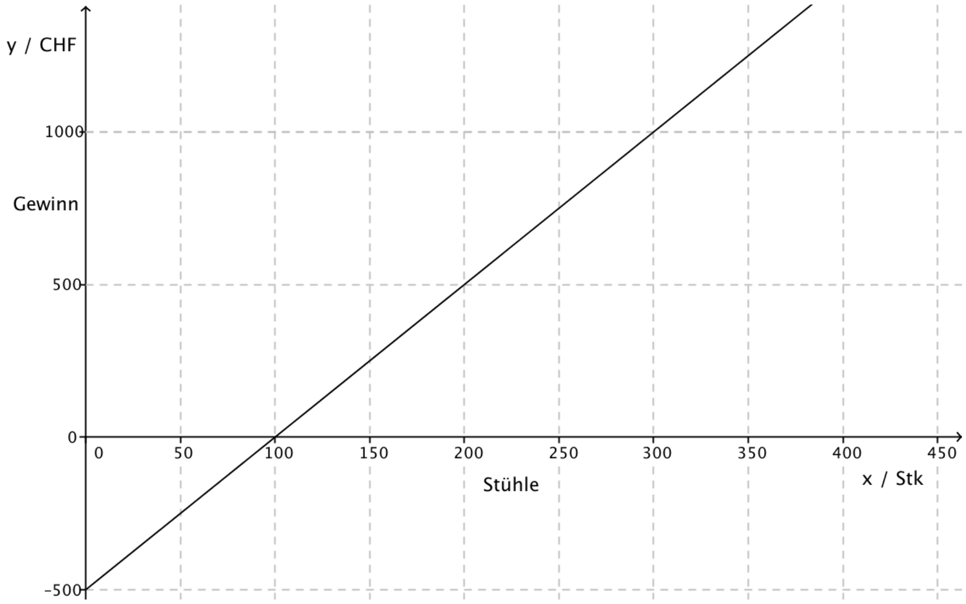
Lösungsdetails		**Punkte**
$x = \textit{Stühle in Stk}, \quad y = \textit{Gesamtkosten in CHF}$		
$y_{K1} = 15x + 300 \qquad (0 \leq x \leq 200)$		*2*
$y_{K2} = 12x + q$		*1*
$3300 = 12 \cdot 200 + q$		
$q = 900$		
$y_{K2} = 12x + 900 \qquad (x > 200)$		*2*
Abzüge:	*Keine Grenzen*	*-1*

b) Stellen Sie diesen Sachverhalt in einem geeigneten Diagramm grafisch dar.

Lösungsdetails		**Punkte**
		*je 2*
Abzüge:	*Keine oder falsche Achsenbeschriftung*	*-1*

Für einen anderen Anlass rechnet die Klasse mit folgender Gewinnfunktion (siehe untenstehende Grafik).

c) Wie lautet die Gewinnfunktion und wie viele Stühle müssen mindestens besetzt werden, damit die Klasse keinen Verlust macht?



Lösungsdetails		**Punkte**
$y_G = 5x - 500$		*1*
$x = 100$		*1*
Es müssen mindestens 100 Stühle besetzt sein.		
Abzüge:	*Kein AS*	*-1*

d) Welche Gebühr muss die Klasse von jedem Kinobesucher verlangen, damit der prognostizierte Gewinn (siehe Teilaufgabe c)) erreicht werden kann, wenn die Miete pro Stuhl nur CHF 10.00 beträgt und die Grundgebühr CHF 500.00?

Lösungsdetails		**Punkte**
$y_E = 5x - 500 + 10x + 500 = 15x$		*2*
Die Klasse muss CHF 15.00 verlangen.		
Abzüge:	*Kein AS*	*-1*

Aufgabe 3

7 Punkte

Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der Geraden g, h und f unter folgenden Bedingungen:

- Auf der Geraden g liegen die Punkte P(-15/0) und Q(6/7).
- Die Gerade h mit der Steigung $-\frac{5}{7}$ schneidet die Gerade g auf der y-Achse.
- Die Gerade f verläuft parallel zur Geraden g und schneidet die Gerade h auf der x-Achse.

Lösungsdetails		**Punkte**
$m_g = \frac{7-0}{6+15} = \frac{1}{3}$ $7 = \frac{6}{3} + q_g \rightarrow q_g = 5$ $y_g = \frac{1}{3}x + 5$		*2*
$q_h = 5,\ m_h = \frac{-5}{7} \rightarrow y_h = \frac{-5}{7}x + 5$		*2*
$0 = \frac{-5}{7}x + 5,\ S_x(7/0)$		*1*
$m_f = \frac{1}{3}$ $0 = \frac{1}{3} \cdot 7 + q_f$ $q_f = -\frac{7}{3} \rightarrow y_f = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$		*2*
Abzüge:		

Aufgabe 4

10 Punkte

Eine Parabel wird durch die Funktionsgleichung y = (x + 3)(2x – 7) beschrieben.

a) Ermitteln Sie die Nullstellen, den y-Achsen-Schnittpunkt und den Scheitelpunkt der Parabel.

Lösungsdetails		**Punkte**
$y = 2x^2 - x - 21$		
N_1(-3/0), N_2(3.5/0)		*2*
S_y(0/-21)		*1*
S(0.25/-21.125)		*2*
Abzüge:	*Punkte nicht korrekt dargestellt*	*Max -2*

b) Ermitteln Sie allfällige Schnittpunkte der Parabel mit der Geraden mit der Gleichung $y = 0.5x - 10$

Lösungsdetails		**Punkte**
$2x^2 - x - 21 = 0.5x - 10$		
$x_1 = -2,\ \ x_2 = 2.75$		*2*
S_1(-2/-11)		*1*
S_2(2.75/-8.625)		*1*
Abzüge:	*Punkte nicht korrekt dargestellt*	*-1*

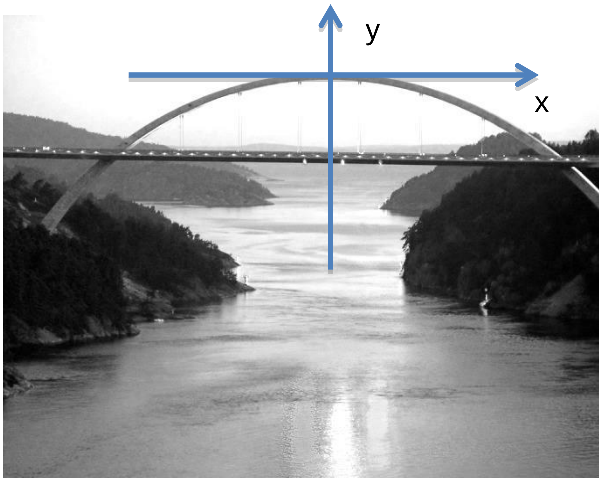
c) Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel, wenn man sie vertikal so verschiebt, dass eine ihrer Nullstellen die x-Koordinate 0 erhält?

Lösungsdetails		**Punkte**
$y = 2x^2 - x$		*1*
Abzüge:		

Aufgabe 5

4 Punkte

Die Svinesund-Brücke an der Grenze zwischen Schweden und Norwegen wird von einem parabelförmigen Träger getragen, dessen Form mit der Gleichung $y = -0.00603x^2$ beschrieben werden kann.



a) Schliessen Sie aufgrund der Funktionsgleichung darauf, wie die x- und y-Achsen liegen müssen. Tragen Sie diese im Foto ein.

Lösung: s. Bild

b) Die Fahrbahn hängt 30m unter dem höchsten Punkt des Brückenbogens. Wie lange ist das Fahrbahnstück unter dem Bogen (auf ganze Meter genau)?

Lösungsdetails			**Punkte**
a)	*Lösung: siehe Foto. Achsen korrekt eingezeichnet*		*1*
b)	$-30 = -0.00603x^2$		*1*
	$x^2 = 4975.124$		
	$x_1 = -70.53,\ x_2 = 70.53$		*1*
	2·70.53 = 141.06		*1*
	Die Fahrbahnlänge beträgt 141m.		
Abzüge:	*Kein AS*		*-1*

Aufgabe 6

18 Punkte

a) Sie möchten ins E-Auto-Business einsteigen und zwei Modelle anbieten: den kompakten und günstigen Amperillo (x) und den luxuriöseren und leistungsfähigeren Ohmo (y). Für das erste Jahr rechnen Sie mit folgenden Rahmenbedingungen: Sie möchten mindestens 20 Wagen einkaufen. Der Amperillo kostet im Ankauf CHF 27‘000.00, der Ohmo CHF 36‘000.00. Ihr Einkaufsbudget liegt bei CHF 1‘944‘000.00. Im Lager haben Sie Platz für 85 Amperillos oder 51 Ohmos oder eine entsprechende Kombination davon. Die beiden Fahrzeuge benötigen dieselben Akku-Module. Während der Amperillo nur 3 Module benötigt, braucht der Ohmo 8 davon. Der Akku-Lieferant kann im Moment höchstens 380 Stück liefern. Ihr Marketingchef empfiehlt, mindestens halb so viele Ohmos zu bestellen wie Amperillos. Der Amperillo soll für CHF 30‘000.00 verkauft werden, der Ohmo für CHF 40‘000.00.

Erstellen Sie das lineare Programm und die Zielfunktion für einen maximalen Gewinn **(OHNE Grafik)**.

Lösungsdetails	Punkte
x: Anz. Amperillo	
y: Anz. Ohmo	
$x + y \geq 20$	*1*
$27'000x + 36'000y \leq 1'944'000$	*1*
$y \leq \frac{-51}{85}x + 51,\ y \leq -0.6x + 51$ *oder* $\frac{x}{85} + \frac{y}{51} \leq 1$	*2*
$3x + 8y \leq 380$	*1*
$x \leq 2y$	*2*
$z_{max} = 3'000x + 4'000y$	*1*
Abzüge:	

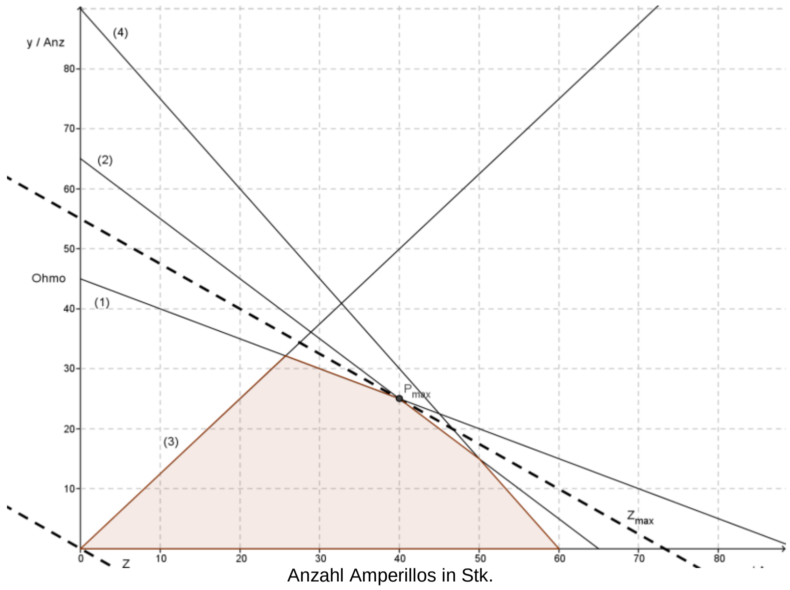
b) Die Kalkulationen eines Beraters ergeben eine andere Konstellation:

(1) $y \leq \frac{-1}{2}x + 45$ (2) $y \leq -x + 65$

(3) $y \leq 1.25x$ (4) $y \leq -1.5x + 90$

$z_{max} = 3'600x + 4'800y$

Erstellen Sie ein entsprechendes Planungspolygon mit Zielfunktion für den maximalen Gewinn.

Lösungsdetails		**Punkte**
z: $y = \frac{-3}{4}x$ 		*Ger. je 1* *Polyg. 1* *Z 1* *Pmax 1*
Abzüge:	*Keine oder falsche Achsenbeschriftung*	*-1*

c) Ermitteln Sie rechnerisch, wie viele Amperillos und Ohmos Sie für einen maximalen Gewinn bestellen müssen.

Lösungsdetails		**Punkte**
$\frac{-1}{2}x + 45 = -x + 65$ $x = 40, \quad y = 25$ *Ich muss 40 Amperillos und 25 Ohmos bestellen.*		*2*
Abzüge:	*Kein AS*	*-1*

d) Wie gross ist in diesem Fall der Gewinn?

Lösungsdetails		**Punkte**
$3'600 \cdot 40 + 4'800 \cdot 25 = 264'000$ *Der Gewinn beträgt CHF 264'000.00.*		*1*
Abzüge:	*Kein AS*	*-1*

Aufgabe 7

9 Punkte

Die Bevölkerung eines Landes beträgt heute 10 Millionen Menschen. Das jährliche Bevölkerungswachstum beträgt 2%.

a) Wie gross war die Bevölkerung vor 5 Jahren? (Auf ganze Personen runden)

Lösungsdetails		Punkte
$\frac{10}{1.02^5} = 9'057'308.09$ *Vor 5 Jahren waren es 9'057'308 Menschen.* *(Auf- und Abrunden akzeptiert)*		*2*
Abzüge:	*Kein AS*	*-1*

b) Die Bevölkerung des Nachbarlandes beträgt heute 20 Millionen Menschen. Die Bevölkerung nimmt aber jährlich um 1.8% ab. In welchem Jahr wird die Bevölkerung erstmals unter 16 Millionen Menschen fallen?

Lösungsdetails		Punkte
$n = \frac{log(16) - log(20)}{log(0.982)} = 12{,}28495$ $2014 + 12 = 2026$ *Im Jahre 2026 fällt die Bevölkerung unter 16 Mio.*		*2* *1*
Abzüge:	*Kein AS*	

c) Wie lange dauert es, bis in beiden Ländern gleich viele Menschen leben werden? Lösen Sie die Aufgabe mit einer Gleichung. (Auf zwei Dezimalstellen runden)

Lösungsdetails		Punkte
$10 \cdot 1.02^n = 20 \cdot 0.982^n$ $n = \frac{log(2)}{log\left(\frac{1.02}{0.982}\right)} = 18.25676$ *Es dauert 18.26 Jahre.*		*2* *2*
Abzüge:	*Falsch gerundet* *Kein AS*	*-1* *-1*

Aufgabe 8

7 Punkte

Mircos Sparkonto weist einen aktuellen Stand von CHF 3‘046.80 auf. Um wie viel Prozent höher muss das Guthaben seiner Schwester Sina, die heute CHF 5‘757.00 besitzt, verzinst werden, damit die beiden in 10 Jahren gemeinsam CHF 10‘000.00 auf ihren Konten haben? Der Zinssatz von Mircos Sparkonto beträgt 1.25%.

Lösungsdetails		**Punkte**
p= Zinssatz von Sinas Sparkonto in %		
$3046.80 \cdot 1.0125^{10} + 5756.50 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{10} = 10000$		*4*
$p = \left(\sqrt[10]{\frac{10000-3046.80\cdot 1.0125^{10}}{5756.50}} - 1\right) \cdot 100 = 1.30003 \approx 1.3$		*2*
$1.3 - 1.25 = 0.05$		*1*
Es muss um 0.05% höher verzinst werden.		
Abzüge:	*Kein AS*	*-1*

Aufgabe 9

4 Punkte

Ein Zoobesuch kostet Herrn und Frau Dachs mit ihren vier Kindern CHF 44.00. Herr Fuchs bezahlt für sich, seine drei Kinder und drei Patenkinder insgesamt 40 Rappen mehr als Familie Dachs. Wie viel kostet der Zooeintritt für einen Erwachsenen?

Lösungsdetails		**Punkte**
x: Eintritt Erwachsene in CHF, y: Eintritt Kinder in CHF		
(1) $2x + 4y = 44$		*1*
(2) $x + 6y = 44.4$		*1*
$x = 10.8$		*2*
Erwachsene zahlen CHF 10.80		
Abzüge:	*Keine Variablendeklaration*	*-1*
	Kein AS	*-1*

Aufgabe 10

16 Punkte

a) Ermitteln Sie die Lösungsmenge ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$).
$2^3 = 4^{x+1}$

Lösungsdetails		Punkte
$x = 0.5$ $L = \{0.5\}$		*2*
Abzüge:	*Keine Lösungsmenge*	*-1*

b) Ermitteln Sie die Lösungsmenge ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$).
$3 = log_x \sqrt[3]{512}$

Lösungsdetails		Punkte
$x^3 = 8$ $x = 2$ $L = \{2\}$		*1* *1*
Abzüge:	*Keine Lösungsmenge*	*-1*

c) Ermitteln Sie die Lösungsmenge ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$).
$3^{\frac{3}{2x}} = 9^{x-1}$

Lösungsdetails		Punkte
$\frac{3}{2x} = 2(x-1)$ $0 = 4x^2 - 4x - 3$ $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{8}$ $x_1 = 1.5$; $x_2 = -0.5$ $L = \left\{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$		*2* *1* *1*
Abzüge:	*Keine Lösungsmenge*	*-1*

d) Vereinfachen Sie so weit wie möglich

$$\frac{\frac{c^4-1}{c^2-2c+1}}{\frac{c^2+2c+1}{8c^2-8}}$$

Lösungsdetails	Punkte
$\frac{\frac{(c^2+1)(c^2-1)}{(c-1)(c-1)}}{\frac{(c+1)(c+1)}{8(c+1)(c-1)}}$	2
$\frac{(c^2+1)(c+1)(c-1)}{(c-1)(c-1)} \cdot \frac{8(c+1)(c-1)}{(c+1)(c+1)}$	2
$8(c^2+1)$	1
Abzüge:	

e) Vereinfachen Sie so weit wie möglich

$$\sqrt[n-1]{\frac{a^{n^2-1}}{a^{n-1}}}$$

Lösungsdetails	Punkte
$a^{\frac{n^2-1-n+1}{n-1}}$	1
$a^{\frac{n^2-n}{n-1}}$	1
a^n	1
Abzüge:	