Mathematik

Serie 1 - Lösungen

Prüfungsdauer: 150 Minuten

Max. Punktezahl: 100 Punkte

Bewertungshinweise:

Mehrfachlösungen sind nicht gestattet.

Als Resultate gelten nur eindeutig gekennzeichnete Zahlen, Mengen oder Sätze.

Die Diagramme müssen korrekt beschriftet sein.

Bei fehlenden Antwortsätzen oder Lösungsmengen werden Punkte abgezogen.

Bei den einzelnen Ausrechnungsteilschritten gilt allgemein:
1. Fehler: Abzug von 50% der maximalen Punktzahl dieses Teilschritts
2. Fehler: 0 Punkte für diesen Teilschritt

Es gibt keine halben Punkte.

Ist bei grafischen Lösungen die zugrunde liegende Funktionsgleichung falsch, diese falsche Funktion jedoch korrekt gezeichnet, müssen die Punkte für die grafische Darstellung gegeben werden.

Als Grundlage gilt das Dokument „Mathematik: Hinweise zur Lösungsdarstellung" vom 02.12.1998

Aufgabe 1

5 Punkte

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, ….

a) … die durch die Punkte P(–3/4) und Q(2/–5) verläuft. (3)

Lösungsdetails	Punkte
$m = \frac{-9}{5}$ $b = \frac{-7}{5}$ $y = \frac{-9}{5}x - \frac{7}{5}$	1 1 1
Abzüge:	

b) … die die Steigung m = –2.5 hat und durch den Punkt R(–3/6) geht. (2)

Lösungsdetails	Punkte
b = –1.5 y = –2.5x – 1.5	1 1
Abzüge:	

Aufgabe 2

13 Punkte

In einer Gross-Konditorei fallen bei der Produktion von Crèmeschnitten, unabhängig von der Stückzahl, feste Kosten von CHF 200.00/Tag an. Dazu kommen variable Kosten von CHF 1.25 pro Crèmeschnitte.

a) Bestimmen Sie die Kostenfunktion. (2)

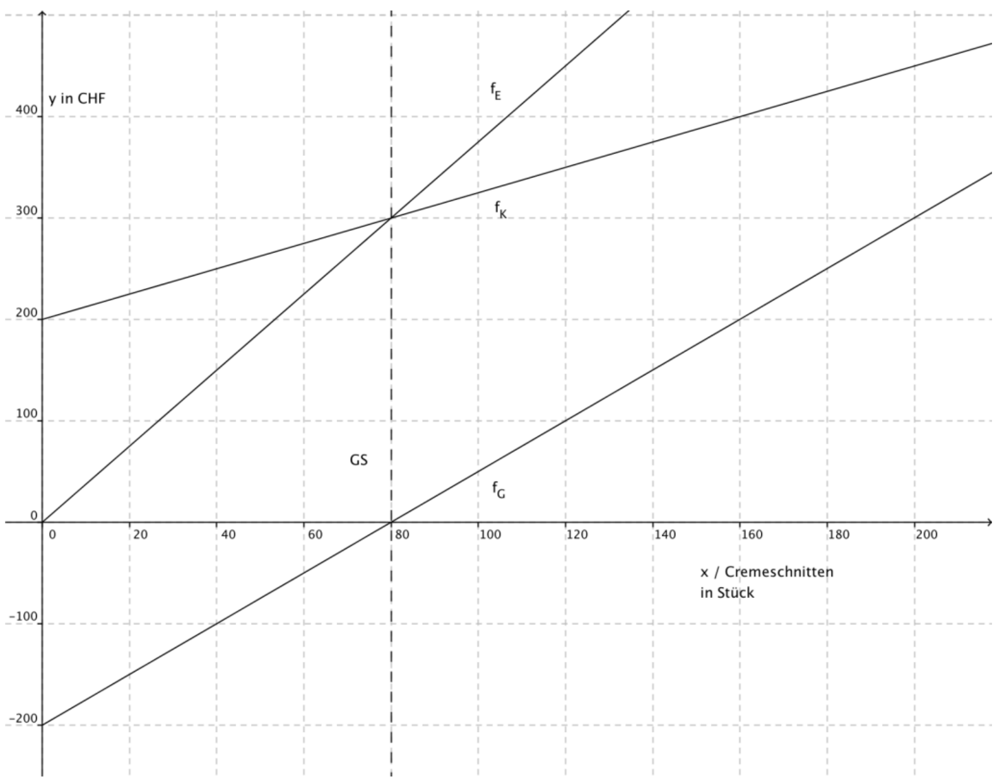
b) Der Konditor rechnet mit einem Erlös von CHF 3.75 pro Crèmeschnitte. Bestimmen Sie die Erlös- und Gewinnfunktion und ermitteln Sie die Gewinnschwelle. (4)

c) Stellen Sie die Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktionen grafisch dar (separates Blatt). (5)

d) Durch verschiedene Optimierungen können ab 150 Stück die variablen Kosten um 20% gesenkt werden.

Bestimmen Sie die neue Kostenfunktion (nicht in Grafik eintragen). (2)

Lösungsdetails		Punkte
a)	$y_K = 1.25x + 200$	2
b)	$y_E = 3.75x$; $y_G = 2.5x – 200$	3
	$3.75x = 1.25x + 200$ → $x = 80$ → Die GS liegt bei 80 Stück.	1
c)		E1/K2/G2



d)	m = 1; q = 237.5 $y_{k2} = x + 237.5$ ($x > 150$)	1 1
Abzüge:	Keine (unvollständige) Beschriftung	Max. -2

Aufgabe 3

16 Punkte

a) Bei Yo-Sushi bestellt Herr Lüssi Sushi für einen Businesslunch. Dafür hat er zwei verschiedene Sushi-Boxen ausgesucht. Die „Classic"-Box (x) enthält 7 Makis und 2 Nigiris, die „Balance"-Box (y) enthält 4 Makis und 5 Nigiris.

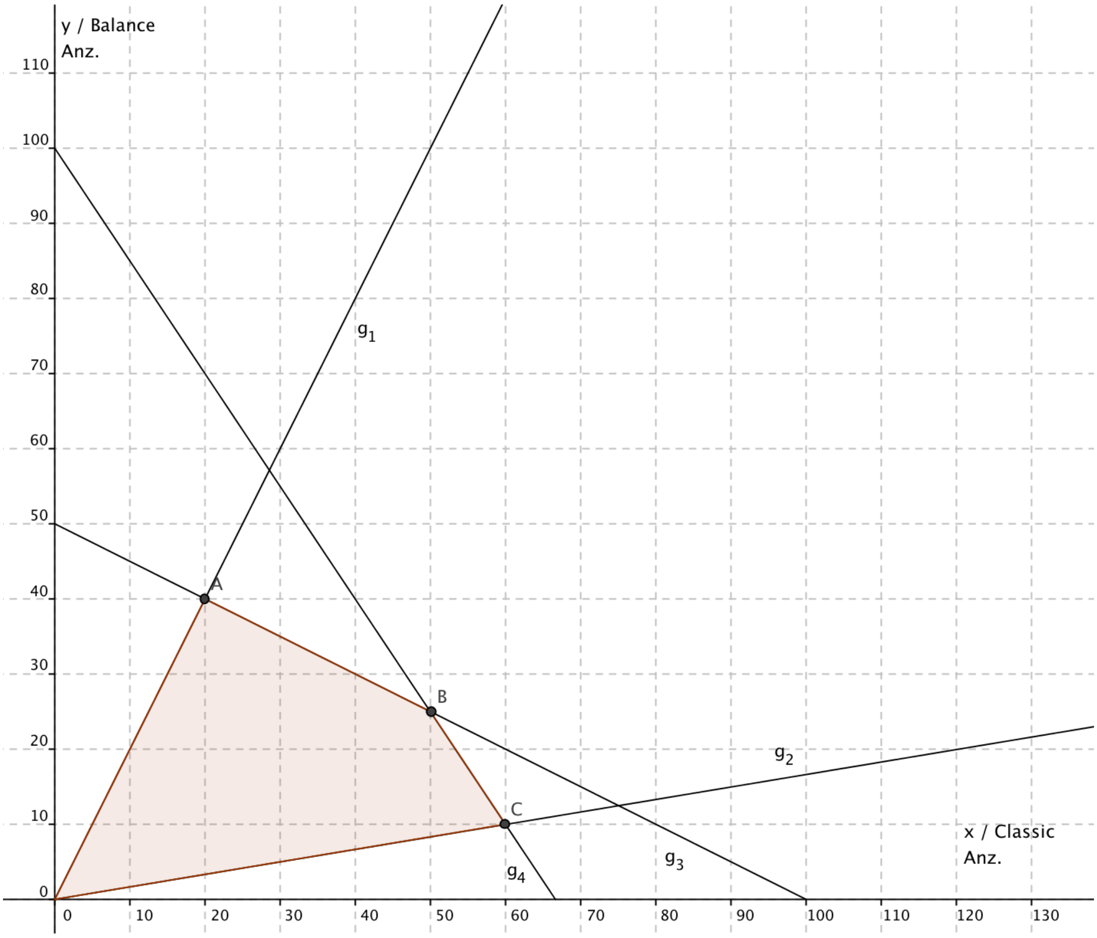
Für die Classic-Box erzielt Yo-Sushi einen Gewinn von CHF 18.00, für die Balance-Box CHF 27.00.

Herr Lüssi möchte nicht mehr als 70 Boxen bestellen. Von den „Balance"-Boxen soll es nicht mehr haben als von den „Classic"-Boxen, aber mindestens ein Drittel so viel wie von den Classics. Maximal sollen 400 Makis und 200 Nigiris serviert werden.

Erstellen Sie das lineare Programm **(keine Grafik)** inkl. Zielfunktion für einen maximalen Gewinn für Yo-Sushi. (6)

Lösungsdetails		**Punkte**
x = Anzahl Classic-Boxen, y = Anzahl Balance-Boxen		
$x \geq 0$, $y \geq 0$		
(1)	$x + y \leq 70$	1
(2)	$x \geq y$	1
(3)	$x \leq 3y$	1
(4)	$7x + 4y \leq 400$	1
(5)	$2x + 5y \leq 200$	1
z_{max}:	$z = 18x + 27y$	1
Abzüge:		

b) Zur Freude des Geschäftsführers von Yo-Sushi bestellt Herr Lüssi für einen anderen Firmenanlass wieder Sushi-Boxen bei ihm. Für die Treue verkauft er die Sushi-Röllchen günstiger. Die grafische Darstellung des Planungsprogramms sieht wie folgt aus:



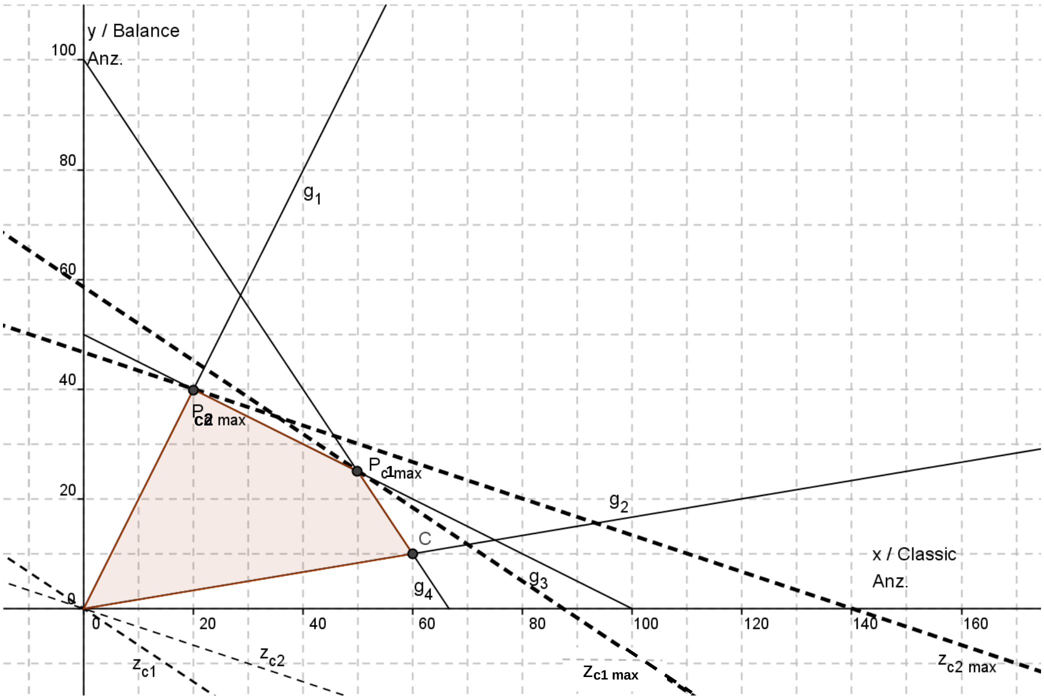
Erstellen Sie anhand der Grafik die Ungleichungen des linearen Programms. Markierte Punkte befinden sich auf den Gitternetzlinien. (4)

Lösungsdetails		**Punkte**
(1)	$y \leq 2x$	1
(2)	$y \geq \frac{1}{6}x$	1
(3)	$y \leq -0.5x + 50$	1
(4)	$y \leq -1.5x + 100$	1
Abzüge:	= anstatt Anordnungszeichen	Max. -2

c1) In diesem Fall erzielt Yo-Sushi einen Gewinn von CHF 14.00 für die „Classic"-Box und CHF 21.00 für die „Balance"-Box.

Zeichnen Sie die Zielfunktion in die Grafik von Aufgabe 3b ein. (1)

Wie viele „Classic"- bzw. „Balance"-Boxen müssen verkauft werden, damit der Gewinn maximal wird? (2)

Lösungsdetails	**Punkte**
Grafik für c1) und c2)  	1
$-0.5x + 50 = -1.5x + 100 \rightarrow x = 50 \rightarrow y = 25$ Der grösste Gewinn resultiert bei 50 „Classic"- und 25 „Balance"-Boxen.	2
Abzüge: Kein Antwortsatz	-1

c2) Damit die „Classic"-Box bekannter wird, verkauft sie Yo-Sushi günstiger. Dadurch halbiert sich der Gewinn bei der „Classic"-Box.

Bestimmen Sie unter den neuen Bedingungen den maximalen Gewinn. (Tipp: Zeichnen Sie die neue Zielfunktion in die Grafik ein.) (3)

Lösungsdetails	**Punkte**
$z_{neu} = 7x + 21y$	1
$P_{c2\ max}(20/40)$	1
Der maximale Gewinn beträgt neu CHF 980.00.	1
Abzüge: Kein Antwortsatz	-1

Aufgabe 4

12 Punkte

a) Ermitteln Sie die Definitions- und Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

$$\frac{10}{2x+1} + \frac{16}{y-3} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{9}{2x+1} - \frac{4}{y-3} = 4$$

(8)

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D}_x = \mathbb{R} \setminus \{-0.5\}$, $\mathbb{D}_y = \mathbb{R} \setminus \{3\}$		1
$\frac{10}{2x+1} + \frac{36}{2x+1} = -\frac{2}{3} + 16$		3
x = 1		2
y = -1		2
$\mathbb{L} = \{(1/-1)\}$		
Abzüge:		

b) Wäre Fritz ein Jahr früher zur Welt gekommen, so wäre sein Vater in zwei Jahren viermal so alt wie er. Wäre Fritz jedoch 4 Jahre später geboren, so entspräche das Alter seines Vaters in 2 Jahren dem 200-fachen des Kehrwerts von Fritz‘ Alter.

Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung des Alters von Fritz und seinem Vater (**das Gleichungssystem muss nicht aufgelöst werden**). (4)

Lösungsdetails		Punkte
x = Alter des Sohnes heute, y = Alter des Vaters heute		
(1) $4\big((x+1)+2\big) = y+2$		2
(2) $\frac{200}{(x-4)+2} = y+2$		2
Abzüge:	Keine Variablendeklaration	-1

Aufgabe 5

13 Punkte

Ermitteln Sie die Definitions- und Lösungsmenge für x. ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$)

a) $\frac{x-6}{9a} = \frac{a-2}{x}$ (5)

Lösungsdetails	Punkte
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	1
$x^2 - 6x = 9a^2 - 18a$	1
$x^2 - 6x - 9a^2 + 18a = 0$	1
$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9a^2 - 18a + 9} = 3 \pm (3a - 3)$	1
$\mathbb{L} = \{3a; 6 - 3a\}$, wobei $a \neq 0$	1
Abzüge:	

b) Tamara hatte für die Ferien CHF 1'140.00 gespart. Nachdem sich die Tageskosten um CHF 19.00 erhöht hatten, musste sie den Aufenthalt um drei Tage verkürzen. Wie viele Tage wollte sie ursprünglich bleiben?

Stellen Sie diesen Sachverhalt in Gleichungsform dar, **ohne sie zu lösen.** (4)

Lösungsdetails	Punkte
x = Anzahl Tage; y = Tageskosten	
(1) xy = 1140 *oder* $\frac{1140}{x} + 19 = \frac{1140}{x-3}$	2
(2) (x – 3)(y + 19) = 1140	2
Abzüge: Keine Variablendeklaration	-1

c) Tamaras Bruder Roberto fuhr ebenfalls in die Ferien. Seine Situation lässt sich mit folgender Gleichung beschreiben: (x = Anzahl ursprünglich geplante Tage)

$$\frac{1260}{x} - 20 = \frac{1260}{x+4}$$

Wie viele Tage wollte er ursprünglich bleiben? (4)

Lösungsdetails	Punkte
x = Anzahl Tage	
$1260x + 5040 - 20x^2 - 80x = 1260x$	2
$20x^2 + 80x - 5040 = 0$; $x^2 + 4x - 252 = (x - 14)(x + 18) = 0$	
$x_1 = 14$, $\cancel{x_2 = -18}$	2
Er wollte ursprünglich 14 Tage bleiben.	
Abzüge: Kein Antwortsatz	-1

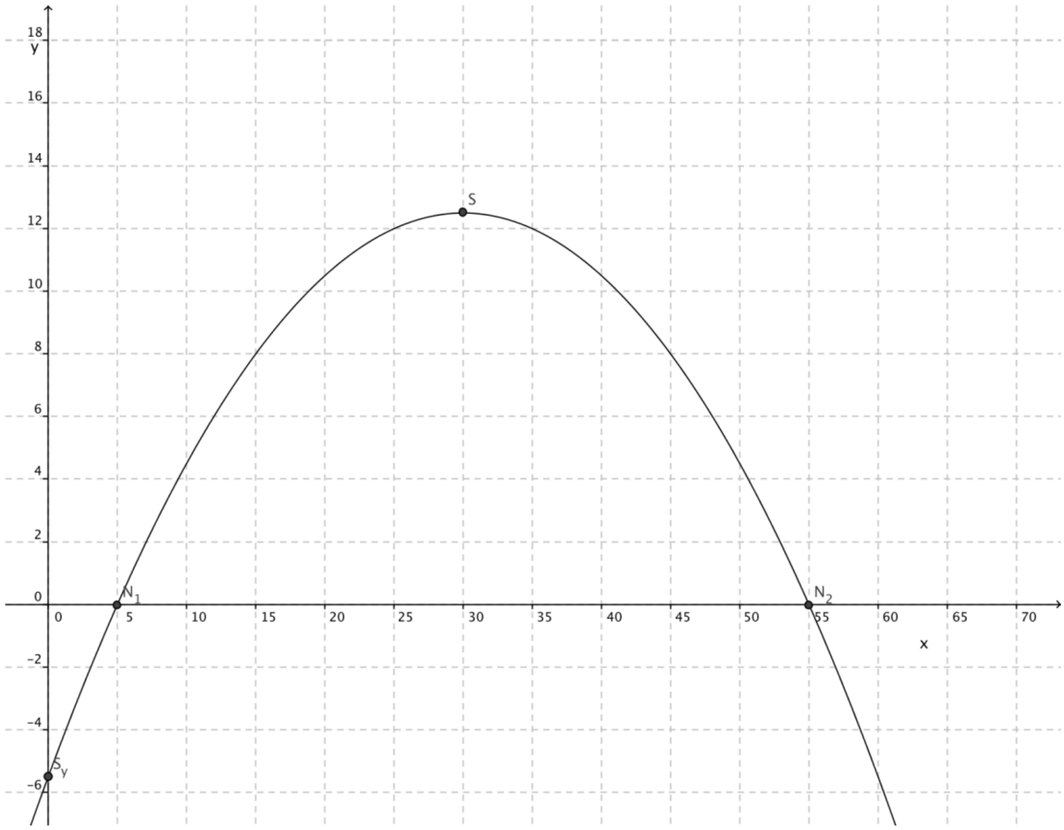
Aufgabe 6

12 Punkte

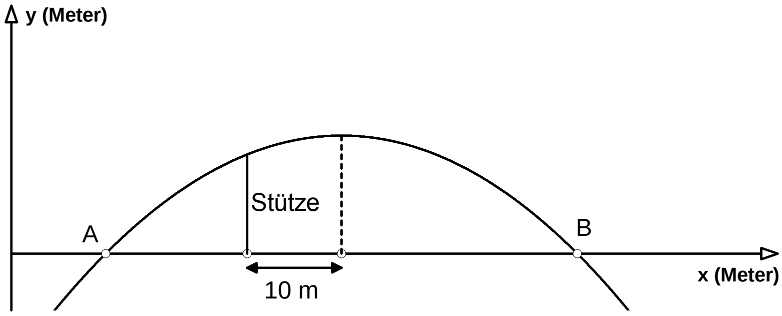
$y = -0.02x^2 + 1.2x - 5.5$ ist die Gleichung einer quadratischen Funktion.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Nullstellen und des Scheitelpunkts. (4)

b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion und die berechneten Punkte in ein Koordinatensystem ein. (4)

<table>
<tr><th>Lösungsdetails</th><th>Punkte</th></tr>
<tr><td>a) $N_1(5/0)$, $N_2(55/0)$,</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$S(30/12.5)$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>b)

</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Abzüge:</td><td></td></tr>
</table>

Die Funktion aus Aufgabe 6a) beschreibt die Form einer Bogenbrücke gemäss folgender Skizze. Das Terrain wird durch die x-Achse abgebildet und die Brücke liegt auf den beiden Auflagepunkten A und B (= Nullstellen) auf. Der Wert 1 im Koordinatensystem entspricht einem Meter.



c) Wie viele Meter liegen die beiden Auflagepunkte auseinander? (1)

d) Welches ist die maximale Höhe der Brücke? (1)

e) Wie hoch ist ein Stützpfeiler, der 10 Meter neben dem Brückenmittelpunkt steht (vgl. Skizze)? (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
c)	Sie liegen 50m auseinander.	1
d)	Die maximale Höhe beträgt 12.5m	1
e)	$x = 20 \rightarrow y = 10.5$ Der Pfeiler ist 10.5m hoch.	2
Abzüge:	Kein Antwortsatz	Max. -1

Aufgabe 7

10 Punkte

Die Länder A, B und C haben heute genau denselben CO_2-Ausstoss pro Jahr.

a) Gemäss einem bestimmten Entwicklungsszenario rechnet man damit, dass im Land A der CO_2-Ausstoss um 7% pro Jahr zunehmen wird. Nach wie vielen ganzen Jahren hat sich der CO_2-Ausstoss in diesem Land verdoppelt? (3)

Lösungsdetails		**Punkte**
$2 = 1 \cdot (1.07)^n$		2
n = 10.24		1
Es dauert 11 Jahre, bis sich der CO_2-Ausstoss im Land A verdoppelt hat.		
Abzüge:	Kein Antwortsatz	-1

b) Das Land B hat sich zum Ziel gesetzt, den CO_2-Ausstoss in 30 Jahren zu halbieren. Um wie viel Prozent im Jahr muss er also im Schnitt gesenkt werden (Prozentwert auf 1 Dezimale gerundet)? (3)

Lösungsdetails		**Punkte**
$\frac{1}{2} = 1 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{30}$		2
p = 2.3		1
Das Land B will den CO_2-Ausstoss jährlich um 2.3% senken.		
Abzüge:	Kein Antwortsatz	-1

c) Das Land C will den CO_2-Ausstoss jährlich um 4% senken. Nach wie vielen ganzen Jahren liegt der CO_2-Ausstoss von Land C erstmals unter der Hälfte des CO_2-Ausstosses von Land A? (4)

Lösungsdetails		**Punkte**
$0.96^n < \frac{1}{2} \cdot 1.07^n$		2
n > 6.39		2
Nach 7 Jahren stösst C halb so viel CO_2 aus wie A.		
Abzüge:	Kein Antwortsatz	-1

Aufgabe 8

11 Punkte

a) Ermitteln Sie die Lösungsmenge. ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$, keine Definitionsmenge verlangt)
$\log_{3x} 243 = 5$ (2)

Lösungsdetails		Punkte
$(3x)^5 = 243$		1
$x = 1 \rightarrow \mathbb{L} = \{1\}$		1
Abzüge:		

b) Ermitteln Sie die Lösungsmenge. ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$, keine Definitionsmenge verlangt)
$4^{x+0.5} = 32$ (2)

Lösungsdetails		Punkte
$(x + 0.5) \lg 4 = \lg 32$		1
$x = 2 \rightarrow \mathbb{L} = \{2\}$		1
Abzüge:		

c) Vereinfachen Sie so weit wie möglich.
$\sqrt[8]{\sqrt{a^4} \cdot a^{14}} + \sqrt[16]{a^{32}}$ (3)

Lösungsdetails		Punkte
$\sqrt[8]{a^2 \cdot a^{14}} + a^2$		2
$a^2 + a^2 = 2a^2$		1
Abzüge:		

d) Ermitteln Sie die Lösungsmenge. ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$, keine Definitionsmenge verlangt)
$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1}{27} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{x+3}$ (4)

Lösungsdetails		Punkte
$x \cdot log\left(\frac{3}{2}\right) = log\left(\frac{1}{27}\right) + (x+3) \cdot log\left(\frac{3}{4}\right)$		2
$x\left(log\left(\frac{3}{2}\right) - log\left(\frac{3}{4}\right)\right) = log\left(\frac{1}{27}\right) + 3 \cdot log\left(\frac{3}{4}\right)$		
$x = \frac{log\left(\frac{1}{27}\right)+3\cdot log\left(\frac{3}{4}\right)}{log\left(\frac{3}{2}\right)-log\left(\frac{3}{4}\right)}$		1
$x = -6 \rightarrow \mathbb{L} = \{-6\}$		1
Abzüge:		

Aufgabe 9

8 Punkte

a) Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

$$\frac{\frac{2ab}{b-a}+\frac{b-a}{2}}{1+\frac{2b}{a-b}}$$ (5)

Lösungsdetails	Punkte
$\frac{\frac{4ab+(b-a)^2}{2(b-a)}}{\frac{a+b}{a-b}}$	2
$= \frac{4ab+b^2-2ab+a^2}{2(b-a)} \cdot \frac{a-b}{a+b}$	1
$= \frac{(a+b)^2}{2(b-a)} \cdot \frac{a-b}{a+b}$	1
$= -\frac{a+b}{2}$	1
Abzüge:	

b) Kürzen Sie so weit wie möglich.

$$\frac{162c^4-2}{24c^2+8c}$$ (3)

Lösungsdetails	Punkte
$\frac{81c^4-1}{4c(3c+1)}$	1
$= \frac{(9c^2-1)(9c^2+1)}{4c(3c+1)}$	1
$= \frac{(3c-1)(9c^2+1)}{4c}$	1
Abzüge:	