

# Mathematik

## Serie 1 - Lösungen

Prüfungsdauer: 150 Minuten

Max. Punktezahl: 100 Punkte

### **Bewertungshinweise:**

Mehrfachlösungen sind nicht gestattet.

Als Resultate gelten nur eindeutig gekennzeichnete Zahlen, Mengen oder Sätze.

Die Diagramme müssen korrekt beschriftet sein.

Bei fehlenden Antwortsätzen oder Lösungsmengen werden Punkte abgezogen.

Bei den einzelnen Ausrechnungsteilschritten gilt allgemein:

1. Fehler: Abzug von 50% der maximalen Punktzahl dieses Teilschritts
2. Fehler: 0 Punkte für diesen Teilschritt

Es gibt keine halben Punkte.

Ist bei grafischen Lösungen die zugrunde liegende Funktionsgleichung falsch, diese falsche Funktion jedoch korrekt gezeichnet, müssen die Punkte für die grafische Darstellung gegeben werden.

Als Grundlage gilt das Dokument „Mathematik: Hinweise zur Lösungsdarstellung“ vom 02.12.1998.

Dieser Lösungs- und Bewertungsschlüssel darf nur von Mathematik-Lehrenden kaufmännischer Berufsschulen verwendet werden. Insbesondere darf er in späteren Jahren im Unterricht zu Übungszwecken nicht 1:1 kopiert und an Lernende abgegeben werden. Jede weitere Verwendung der Originalprüfung wie auch dieses Schlüssels bedarf der Bewilligung der Kommission Kaufmännische Berufsmatura, Kt. ZH. Kommerzielle Verwendung - auch nur auszugsweise - bleibt untersagt.

## Aufgabe 1

8 Punkte

- a) Teilt man 10 durch eine Zahl, verdoppelt den Quotienten und subtrahiert dann die Zahl, so erhält man 8. ( $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ )

Erstellen Sie die Gleichung, ohne sie zu lösen.

(2)

Lösungsdetails		Punkte
$x =$ gesuchte Zahl $\frac{10}{x} \cdot 2 - x = 8$		2
Abzüge:	Keine Variablendefinition	-1

- b) Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichung. ( $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ )

$$\frac{x^2}{x-9} - \frac{135-24x}{9-x} = 0$$

(6)

Lösungsdetails		Punkte
$D = \mathbb{R} \setminus 9$		1
$x^2 - 24x + 135 = 0$		2
$x_1=9$		1
$x_2=15$		1
$L = 15$		1
Abzüge:	Kein Punkt für $L$ , wenn $L = 9; 15$	

## Aufgabe 2

11 Punkte

Peter hat heute CHF 10'000.00 auf seinem Konto. Vor fünf Jahren waren es CHF 9'124.20. Der Zinssatz war über die ganze Zeit konstant.

- a) Wie gross war der Zinssatz? (2)

Lösungsdetails		Punkte
$\sqrt[5]{\frac{10000}{9124.20}} = 1.018500017$ Der Zinssatz betrug 1.85%.		2
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	1

- b) Wie lange würde es bei einem durchschnittlichen Zinssatz von 2.25% dauern, bis sich das Kapital verdreifacht hat? (2)

Lösungsdetails		Punkte
$\frac{\lg 3}{\lg 1.0225} = 49.37$ Es würde 49.37 Jahre dauern.		2
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	1

Peters Vater kauft ein Motorrad, dessen Neuwert CHF 25'000.00 beträgt. Der Wert des Motorrads wird jährlich mit 20% abgeschrieben.

- c) Auf wie viel Prozent des Neuwertes würde der Wert des Motorrads in 10 Jahren sinken?(3)

Lösungsdetails		Punkte
$0.8^{10} \cdot 100 = 10.74$ Der Wert des Motorrads würde auf rund 11% des Neuwerts sinken.		3
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	1

- d) Wie lange dauert es, bis Peter seinem Vater das Motorrad abkaufen kann, wenn er für seine CHF 10'000.00 mit einem Zinssatz von 2% rechnen kann (auf 2 Dezimalen)?

Lösen Sie die Aufgabe mit einer Gleichung. (4)

Lösungsdetails		Punkte
$25000 \cdot 0.8^n = 10000 \cdot 1.02^n$		2
$n=3.77$		2
Es würde 3.77 Jahre dauern.		
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	1

### Aufgabe 3

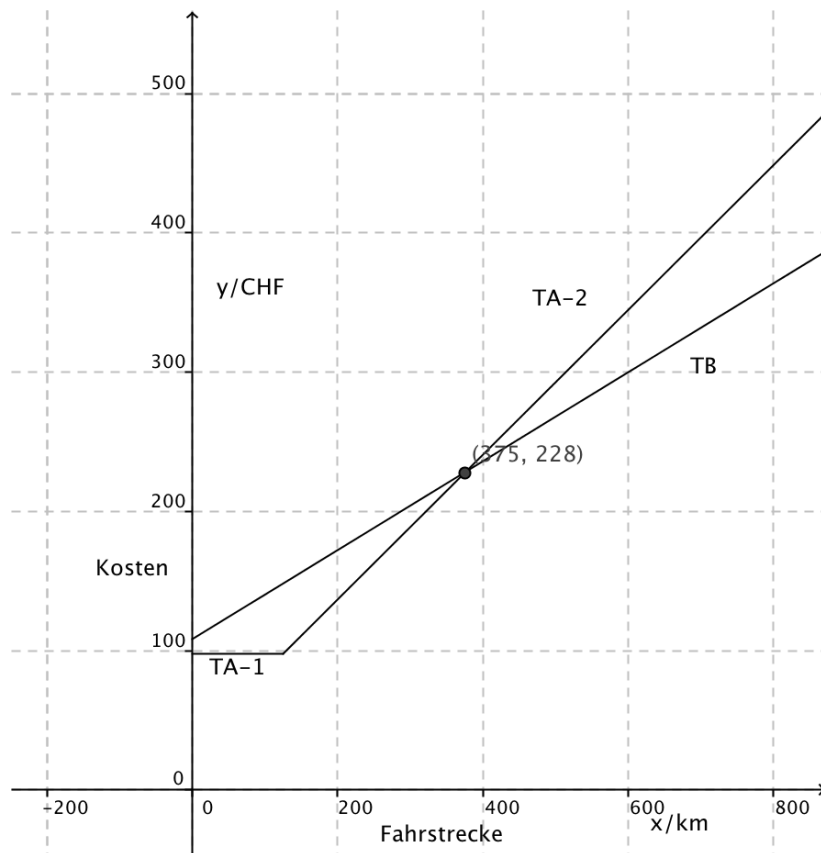
16 Punkte

Eine Autovermietung bietet 2 Tarife an: Beim Tarif „A“ kostet ein Kleinwagen für 50km CHF 124.00 und für 250km CHF 188.00. Beim Tarif „B“ kostet die Grundgebühr CHF 98.00, darin sind 125km inbegriffen. Für jeden zusätzlich gefahrenen Kilometer stellt die Autovermietung 52 Rappen in Rechnung.

- a) Bestimmen Sie die Gleichungen für die Kosten der beiden Mietvarianten. (5)

Lösungsdetails		Punkte
Tarif „A“ $y = 0.32x + 108$		2
Tarif „B“ $y = 98 \quad (x \leq 125)$		1
$y = 0.52x + 33 \quad (x > 125)$		2
Abzüge:		

- b) Stellen Sie den Sachverhalt in einem geeigneten Diagramm auf dem beigelegten Millimeterpapier dar. (5)



Gerade TA-1: 1 Punkt, Gerade TA-2: 2 Punkte, Gerade TB: 2 Punkte

- c) Berechnen Sie mit Hilfe einer Gleichung, unter welchen Umständen die beiden Varianten gleich teuer sind. (3)

Lösungsdetails		Punkte
0.52x + 33 = 0.32x + 108		2
x = 375		1
Bei einer Fahrstrecke von 375km sind die beiden Tarife gleich teuer.		
Abzüge:	Kein Antwortsatz	-1

- d) Sie planen eine Fahrt von 275 Kilometern. Welcher Tarif ist günstiger und wie viel sparen Sie ein? (3)

Lösungsdetails		Punkte
Tarif „A“: CHF 196.00		1
Tarif „B“: CHF 176.00		1
Tarif „B“ ist bei 275km um CHF 20.00 günstiger.		1
Abzüge:	Kein Antwortsatz	-1

### Aufgabe 4

15 Punkte

Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

a) 
$$\frac{m^{2x+1} \cdot m^{2x-1}}{m^{3x} \cdot m} \quad (2)$$

Lösungsdetails		Punkte
$m^{2x+1+2x-1-3x-1} = m^{x-1}$		2
Abzüge:		

b) 
$$1 + \frac{b}{a} - \frac{a}{a-b} : \frac{2b^2 b - c^2}{2ab - 2a^2} \quad (4)$$

Lösungsdetails		Punkte
$\frac{a^2 - ab + ab - a^2 - b^2 \cdot 2a b - a}{a a - b \cdot 2b^2 b - c^2}$		2
$\frac{-b^2 \cdot 2a b - a}{a a - b \cdot 2b^2 b - c^2}$		
$\frac{1}{b - c^2}$		2
Abzüge:		

c)  $\log_a 14 + \log_a 15 - \log_a 21 \quad (2)$

Lösungsdetails		Punkte
$\log_a \frac{14 \cdot 15}{21} = \log_a 10$		2
Abzüge:		

d)  ${}^4 \sqrt{a^{2^3} a^6} + {}^6 \sqrt{b^{10}} \cdot {}^4 \sqrt{{}^3 \sqrt{b^2}} \quad (3)$

Lösungsdetails		Punkte
$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{6}}$		2
a + b		1
Abzüge:		

$$e) \frac{2 - \frac{b}{a}}{\frac{2a}{b} - 1} \cdot \frac{1 + \frac{b}{a}}{1 + \frac{a}{b}} \quad (4)$$

Lösungsdetails		Punkte
$\frac{\frac{2a-b \cdot b}{a \cdot 2a-b}}{\frac{a+b \cdot b}{a \cdot a+b}}$ $\frac{\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}}$	2	
1	2	
Abzüge:		

## Aufgabe 5

8 Punkte

Ermitteln Sie die Lösungsmenge für  $x$ . ( $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ )

a)  $3 \cdot \log_{\frac{3}{2}} 2^{\frac{1}{4}} = 3x$  (4)

Lösungsdetails		Punkte
$\log_{\frac{3}{2}} \frac{9}{4} = x$		2
$L = 2$		2
Abzüge:	Keine Lösungsmenge	-1

b)  $7^{2x-1} = \frac{1}{49}$  (2)

Lösungsdetails		Punkte
$7^{2x-1} = 7^{-2}$		1
$2x = -1$		1
$L = -\frac{1}{2}$		
Abzüge:	Keine Lösungsmenge	-1

c)  $6 = \log_x 64$  (2)

Lösungsdetails		Punkte
$6 = \log_x 2^6$		1
$L = 2$		1
Abzüge:	Keine Lösungsmenge	-1



## Aufgabe 6

17 Punkte

Ihr Chef beauftragt Sie, einen Trupp aus Profis ( $x$ ) und Laien ( $y$ ) für ein spannendes Projekt zusammenzustellen. Da Sie in den Lokalitäten Ihrer Firma arbeiten werden, darf die Gruppe höchstens 10 Leute umfassen. Ein Profi kostet 7 Taler pro Tag, ein Laie 2 Taler. Der Gesamttageslohn darf 40 Taler nicht überschreiten. Zudem müssen wegen weiterer Kostenüberlegungen mindestens ein Drittel so viele Laien wie Profis angestellt werden. Aus Qualitätsgründen sollen mindestens ein Fünftel mehr Profis als Laien beschäftigt werden. Ein Profi arbeitet täglich 12 Stunden, ein Laie dreimal weniger.

- a) Erstellen Sie das lineare Programm und formulieren Sie die Zielfunktion für ein maximales tägliches Arbeitspensum dieses Trupps. **(ohne Grafik)** (7)

Lösungsdetails		Punkte
(1)	$x + y \leq 10$	1
(2)	$7x + 2y \leq 40$	1
(3)	$y \geq \frac{1}{3}x$	2
(4)	$x \geq \frac{6}{5}y$	2
	$Z_{\max} = 12x + 4y$	1
Abzüge:		

b) Dank einer Fusion stehen Ihnen neu bessere Konditionen zur Verfügung. Die Zahlen können angepasst werden, und Ihr neues lineares Programm lautet: (8)

(1)  $y \geq -x + 4$

(2)  $y \leq -6x + 57$

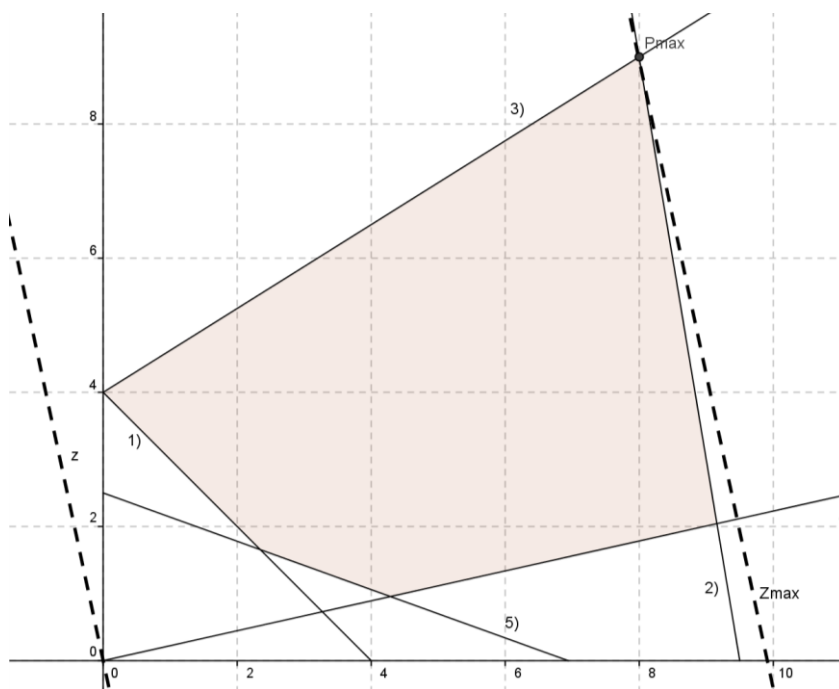
(3)  $y \leq \frac{5}{8}x + 4$

(4)  $y \geq \frac{2}{9}x$

(5)  $y \geq -\frac{5}{14}x + \frac{5}{2}$

$Z = 14x + 3y$

Stellen Sie das neue lineare Programm auf dem beigelegten Millimeterpapier grafisch dar.



Pro Gerade: 1 Punkt, Polygon: 1 Punkt,  $Z_{\max}/P_{\max}$ : 1 Punkt

c) Wie viele Profis und Laien sind einzustellen, wenn das Gesamtpensum möglichst gross sein soll? (1)

Lösungsdetails		Punkte
Es müssen 8 Profis und 9 Laien eingestellt werden.		1
Abzüge:	Kein Antwortsatz	-1

d) Wie gross wird dieses Pensum? (1)

Lösungsdetails		Punkte
Das maximale Pensum beträgt 139 Arbeitsstunden pro Tag.		1
Abzüge:	Kein Antwortsatz	-1

## Aufgabe 7

10 Punkte

- a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems. ( $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ )  
Keine Definitionsmenge verlangt! (6)

$$(1) \quad \frac{a}{x+y} - \frac{b}{x-y} = \frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}$$

$$(2) \quad a(x+y) - b(x-y) = 0$$

Lösungsdetails		Punkte
$\frac{a}{x+y} - \frac{b}{x-y} = \frac{a+b}{x+y} \frac{a-b}{x-y}$ $a x - y - b x + y = a + b \quad a - b$	1	
$(1) \quad x a - b - y a + b = a + b \quad a - b$		
$(2) \quad x a - b + y a + b = 0$		
$(1)+(2) \quad 2x a - b = a + b \quad a - b$	4	
$x = \frac{a+b}{2}$		
$y = \frac{b-a}{2}$	1	
$L = \frac{a+b}{2} / \frac{b-a}{2}$		
Abzüge:	Keine Lösungsmenge	-1

- b) Die Mutter ist 39 Jahre älter als die Tochter, der Vater ist sogar 44 Jahre älter als die Tochter. Die Mutter ist dreimal so alt wie ihre beiden Kinder zusammen. Gemeinsam sind Mutter und die beiden Kinder 10 Jahre älter als der Vater.

Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung des Alters der Tochter und des Sohnes **(ohne Lösung)**. (4)

Lösungsdetails		Punkte
$x = \text{Alter Tochter}$		
$y = \text{Alter Sohn}$		
$x+39=3(x+y)$	2	
$x+39+x+y=x+44+10$	2	
Abzüge:	Keine Variablendefinition	-1

## Aufgabe 8

15 Punkte

- a) Gegeben sind:      Parabel:  $y = \frac{1}{10}x^2 - x - 20$   
                              Gerade:  $y = 3x - 50$

- a1)      Bestimmen Sie die Nullstellen der beiden Funktionen.      (4)  
 a2)      Bestimmen Sie den Scheitelpunkt der Parabel.      (2)  
 a3)      Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Geraden mit der Parabel.      (4)

**Keine Zeichnung!**

Lösungsdetails		Punkte
$N_1(20/0), N_2(-10/0)$		3
$N_g(\frac{50}{3}/0)$		1
$S(5/-22.5)$		2
$S_1(30/40), S_2(10/-20)$		4
Abzüge:		

- b) Gegeben ist die Parabel:  $y = -0.5x^2 + 2x + c$ .  
 Bestimmen Sie den Parameter c so, dass die Parabel...

- b1)      ...den Punkt P(2/8) als Scheitelpunkt hat.      (2)  
 b2)      ...durch den Punkt Q(4/16) geht.      (3)

Lösungsdetails		Punkte
$c - \frac{4}{4 - 0.5} = 8$		2
$c=6$		
$16 = -0.5 \cdot 16 + 2 \cdot 4 + c$		3
$c = 16$		
Abzüge:		