

Mathematik

Serie 1

Serie 1 - Lösungen

Prüfungsdauer: 150 Minuten

Max. Punktezahl: 100 Punkte

Bewertungshinweise:

1. Mehrfachlösungen sind nicht gestattet.
 2. Als Resultate gelten nur eindeutig gekennzeichnete Zahlen, Mengen oder Sätze
 3. Die Diagramme müssen korrekt beschriftet sein.
 4. Bei fehlenden Antwortsätzen oder Lösungsmengen werden Punkte abgezogen.
 5. Bei den einzelnen Ausrechnungsteilschritten gilt allgemein:
 1. 1 Fehler: Abzug von 50% der maximalen Punktzahl dieses Teilschritts
 2. 2 Fehler: 0 Punkte für diesen Teilschritt
 3. Es gibt keine halben Punkte
 6. Ist bei grafischen Lösungen die zugrunde liegende Funktionsgleichung falsch, diese falsche Funktion jedoch korrekt gezeichnet, müssen die Punkte für die grafische Darstellung gegeben werden.
- Als Grundlage gilt das Dokument „Mathematik: Hinweise zur Lösungsdarstellung“ vom 02.12.1998

Dieser Lösungs- und Bewertungsschlüssel darf nur von Mathematik-Lehrenden kaufmännischer Berufsschulen verwendet werden. Insbesondere darf er in späteren Jahren im Unterricht zu Übungszwecken nicht 1:1 kopiert und an Lernende abgegeben werden. Jede weitere Verwendung der Originalprüfung wie auch dieses Schlüssels bedarf der Bewilligung der Kommission Kaufmännische Berufsmatura, Kt. ZH. Kommerzielle Verwendung - auch nur auszugsweise - bleibt untersagt.

Aufgabe 1

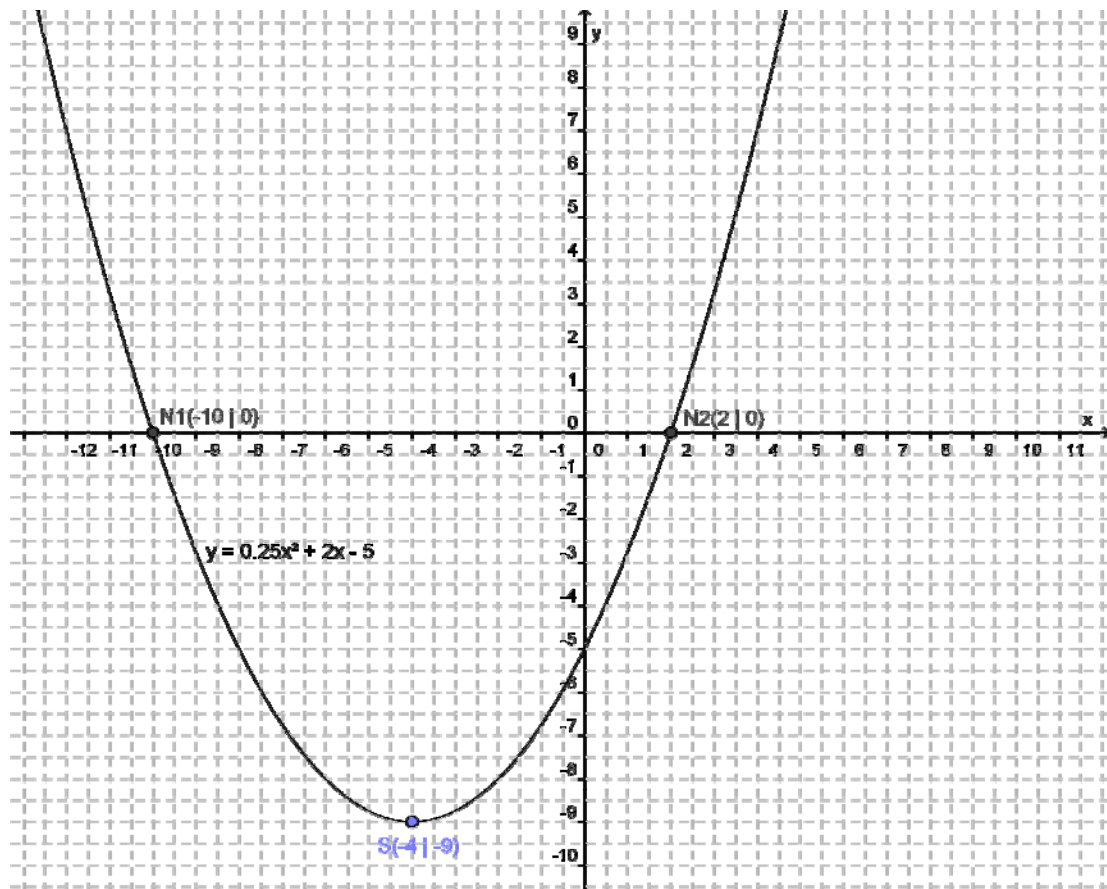
11 Punkte

Gegeben sei folgende Funktion: $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 5$

- a) Bestimmen Sie die Nullstellen. (4P)
- b) Bestimmen Sie den Scheitelpunkt. (2P)
- c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse. (1P)
- d) Zeichnen Sie diese Parabel (auf Millimeterpapier) und markieren Sie die berechneten Punkte. (4P)

Lösungsdetails		Punkte
a) Nullstellenberechnung $0 = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 5$ $0 = x^2 + 8x - 20$ $0 = (x+10)(x-2)$ $x_1 = -10; \quad x_2 = 2;$ $N_1(-10/0) \quad N_2(2/0)$		 2 2
b) Scheitelpunkt $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -4$ $y = c - \frac{b^2}{4a} = -5 - \frac{4}{4 \cdot \frac{1}{4}} = -9$ $S(-4/-9)$		 1 1
c) Schnittpunkt mit y-Achse $P_y(0/-5)$		 1
Abzüge:	<ul style="list-style-type: none"> Fehlende Punktschreibweise (max -2P) 	-1

d) Grafik



4

Abzüge:

- Je falsch eingezeichneter Punkt
- Fehlende Achsenbeschriftung
- Nicht beschriftete Punkte

-1

-1

-1

Aufgabe 2

9 Punkte

Das Gesamtgewicht von 2 gleich schweren Autos ist um 180 kg grösser als das Gesamtgewicht von 26 Elektrorollern. Das Gesamtgewicht von 3 dieser Autos ist um 90 kg kleiner als das Gesamtgewicht von 42 Elektrorollern. Bestimmen Sie das Gewicht eines Autos und das eines Elektrorollers.

Lösungsdetails		Punkte
Gewicht eines Autos = x Gewicht eines Elektrorollers = y I $2x = 26y + 180$ II $3x = 42y - 90$		2 2
Berechnung der 1. Variablen $x = 1'650$ resp. $y = 120$		3
Berechnung der 2. Variablen $y = 120$ resp. $x = 1'650$ AWS: Das Gewicht eines Autos beträgt 1'650 kg, das Gewicht eines Elektrorollers 120 kg		2
Abzüge:	<ul style="list-style-type: none"> • Gemäss Bewertungshinweise • Fehlender AWS 	-1

Aufgabe 3

5 Punkte

Gegeben ist der Punkt $P\left(\frac{7}{2}/-8\right)$ und die Gerade g , welche durch den Punkt P verläuft und die Steigung $m = -\frac{6}{7}$ hat.

- a) Bestimmen Sie die lineare Funktionsgleichung der Geraden g . (3P)
- b) Der Punkt $Q_1(-7/y)$ liegt ebenfalls auf g . Bestimmen Sie die y -Koordinate.
Der Punkt $Q_2(x/-23)$ liegt ebenfalls auf g . Bestimmen Sie die x -Koordinate. (2P)

Lösungsdetails		Punkte
a) Funktionsgleichung $y = -\frac{6}{7}x + q$ $P\left(\frac{7}{2}/-8\right) \text{ einsetzen } \Rightarrow \quad q = -5$ Funktionsgleichung: $y = -\frac{6}{7}x - 5$		2
b) Berechnung der Koordinaten $Q_1(-7/y)$ $x \text{ einsetzen } \Rightarrow y = 1$ $Q_2(x/-23)$ $y \text{ einsetzen } \Rightarrow x = 21$		1
Abzüge: <ul style="list-style-type: none"> Gemäss Bewertungshinweise q falsch berechnet \Rightarrow Folgefehler akzeptieren 		1

Aufgabe 4

15 Punkte

Der Veranstalter eines internationalen Leichtathletik-Meetings offeriert drei teilnehmenden Weltklasseathleten folgende Angebote:

Athlet A erhält ein Startgeld von 40'000 € und einen Anteil von 1.50 € pro zahlendem Besucher.

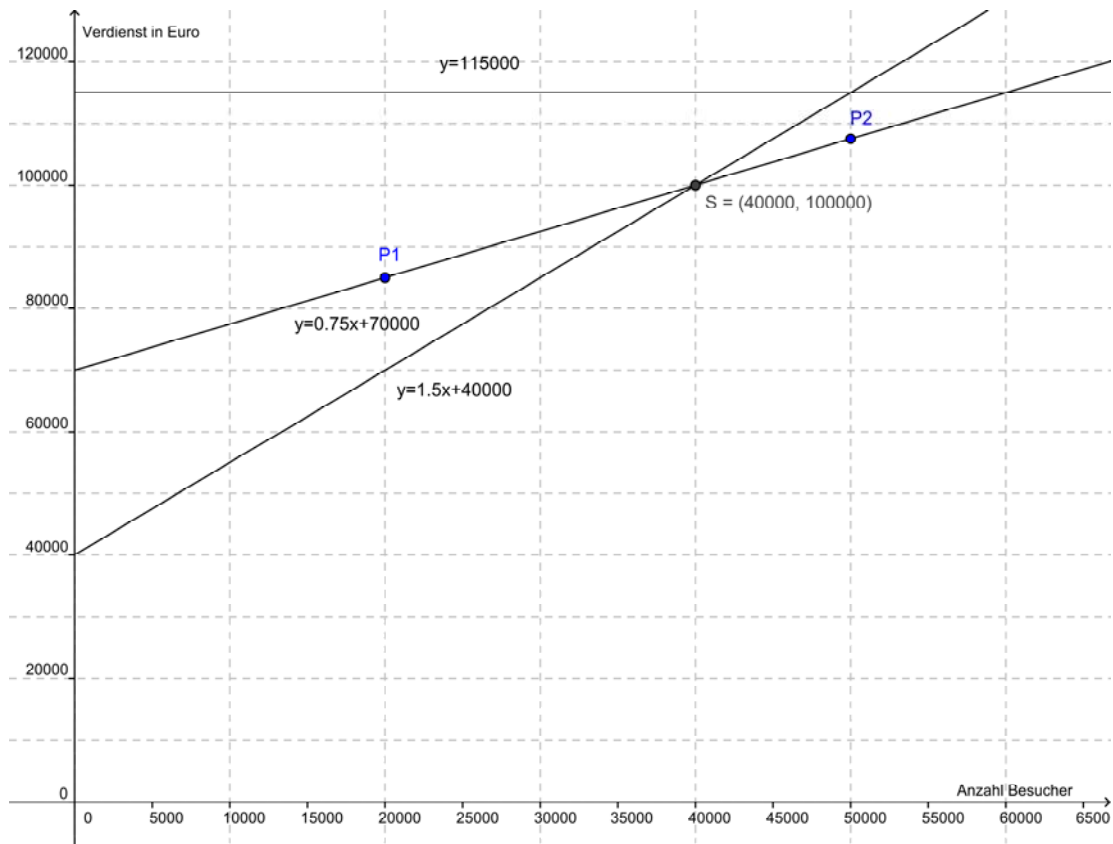
Athlet B ist ebenfalls an den Einnahmen beteiligt. Bei 20'000 Zuschauer verdient er 85'000 €, kommen aber 50'000 Zuschauer, so beträgt sein Verdienst 107'500 €.

Athlet C erhält einen pauschalen Fixbetrag von 115'000 €.

- Bestimmen Sie die Verdienstfunktionen der drei Weltklasseathleten. (6P)
- Stellen Sie die Verdienstfunktionen grafisch dar, wobei sämtliche Schnittpunkte in der Grafik markiert sein müssen. (Beiliegendes Millimeterpapier benutzen) (5P)
- Berechnen Sie die Zuschauerzahl, bei der die Athleten A und B gleich viel verdienen. Wie viel beträgt dieser Verdienst? (2P)
- Das Stadion sollte bei schönem Wetter mit 56'000 zahlenden Zuschauern ausverkauft sein. Welcher Athlet hat dann den grössten Verdienst?
Berechnen Sie diesen Verdienst. (2P)

Lösungsdetails	Punkte
a) Verdienstfunktionen $x = \text{Anzahl Zuschauer}; \quad y = \text{Verdienst in €}$ <u>Athlet A:</u> $\Rightarrow y_A = 1,50x + 40'000$	2
<u>Athlet B:</u> \Rightarrow Berechnung von m : $\Rightarrow m = \frac{107'500 - 85'000}{50'000 - 20'000} = 0,75$	1
\Rightarrow 1 Punkt eingesetzt: $\Rightarrow q = 70'000$	1
$\Rightarrow y_B = 0,75x + 70'000$	1
<u>Athlet C:</u> $\Rightarrow y_C = 115'000$	1

b) Grafik



2 (y_A)

2 (y_B)

1 (y_C)

c) Bestimmung der Besucherzahl sowie des gleichen Verdienstes von A und B

Berechnung: $y_A = y_B \Rightarrow x = 40'000$

$\Rightarrow y = 100'000$

AWS: Bei 40'000 Besuchern verdienen beide gleich viel, nämlich 100'000 €.

1

1

d) Ausverkauftes Stadion

Gemäss Grafik verdient Athlet A dann am besten.

$\Rightarrow y_A = 124'000$

AWS: Sein Verdienst beträgt dann 124'000 €.

1

1

Abzüge:

- Schnittpunkte nicht ersichtlich oder ungenau
- Fehlende Achsenbeschriftung
- Funktionen in Grafik nicht beschriftet
- Fehlender AWS

-1

-1

-1

-1

Aufgabe 5

8 Punkte

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge folgender Gleichung in $G = \mathbb{R}$

$$\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-2}{x+3} = \frac{x^2+7x-3}{x^2+x-6}$$

Lösungsdetails		Punkte
ID = $\mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$		1
$(x+1)(x+3) + (x-2)(x-2) = x^2 + 7x - 3$ $\Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$		4
$(x-2)(x-5) = 0$ oder Berechnung mittels Formel $x_1 = 2$, fällt weg, wegen ID!		2
$x_2 = 5$		1
$IL = \{5\}$		
Abzüge:	<ul style="list-style-type: none"> Gemäss Bewertungshinweise Normalform falsch berechnet, danach folgerichtig 2 Lösungen erhalten: 2 Punkte anstatt 3! Lösungsmenge fehlt 	-1

Aufgabe 6

10 Punkte

Der Anschaffungswert einer Reinigungsmaschine beträgt CHF 1'250'000.--. In den ersten zwei Jahren wird der Wert der Maschine degressiv mit einem Abschreibungssatz von 20% abgeschrieben. Anschliessend wird der Abschreibungssatz auf 13% gesenkt.

- a) Wie gross ist der Buchwert 8 Jahre nach der Anschaffung? (4P)
- b) Wie viele Jahren nach der Anschaffung beträgt der Buchwert der Maschine weniger als CHF 100'000.-- (auf ganze Jahre runden)? (6P)

Lösungsdetails	Punkte
<p>a) Buchwert nach 2 Jahren:</p> $\Rightarrow \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 0,8$ $1'250'000 \cdot (0,8)^2 = 800'000$ <p>Abschreibungssatz nun 13 %:</p> $\Rightarrow \left(1 - \frac{13}{100}\right) = 0,87$ <p>Der Buchwert nach weiteren 6 Jahren beträgt:</p> $800'000 \cdot (0,87)^6 = 346'900.96$ <p>AWS: Buchwert nach total 8 Jahren beträgt CHF 346'900.96.</p>	2
<p>b) Gleichungsansatz: x = Anzahl Jahre</p> $800'000 \cdot (0,87)^x = 100'000$ $\Rightarrow x = 14,93$ <p>Anzahl ganze Jahre = $15 + 2 = 17$</p> <p>AWS: Nach 17 ganzen Jahren liegt der Buchwert unter CHF 100'000.</p>	2 2 2
<p>Abzüge:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Gemäss Bewertungshinweise • Fehlender AWS 	-1

Aufgabe 7

18 Punkte

Ein Hersteller von Sportlernahrung produziert für Kraftsportler die Mischungen „Muskelquell“ (x in kg) und „Hemdenspreng“ (y in kg). Ihre Hauptbestandteile sind in der folgenden Tabelle in Gramm pro Kilogramm Mischung angegeben.

	Protein	Fett	Kohlenhydrat
Muskelquell	300	100	400
Hemdenspreng	150	150	600

Aufgrund der begrenzten Haltbarkeit der Komponenten müssen pro Tag mindestens 62 kg Protein, 57 kg Fett und 93 kg Kohlenhydrat verbraucht werden. Die tägliche Mindestproduktion beträgt für Hemdenspreng 110 kg, für Muskelquell 150 kg. Die Gesamtkapazität der Produktionsanlagen liegt bei maximal 320 kg/Tag.

Die Produktionskosten für Hemdenspreng betragen CHF 17.00 pro kg, für Muskelquell CHF 12.00 pro kg.

a) Erstellen Sie das lineare Programm und formulieren Sie die Zielfunktion für die minimalen Produktionskosten (**keine Grafik**). (7P)

b) Bei der Produktegruppe „Sportgetränke“ dieses Herstellers wird das folgende lineare Programm ermittelt
(x = „Muscle-Fluid“ in 1000 Liter/Tag, y = „Power-Potion“ in 1000 Liter/Tag):

- (1) $x \geq 3$
- (2) $y \geq 7$
- (3) $2x + 9y \leq 180$
- (4) $0.7x + 0.9y \leq 22.5$
- (5) $5x + 9y - 198 \leq 0$
- (6) $18y \geq 11x$

Zeichnen Sie das zugehörige Planungspolygon und markieren Sie dieses deutlich (beiliegendes Millimeterpapier verwenden). (6P)

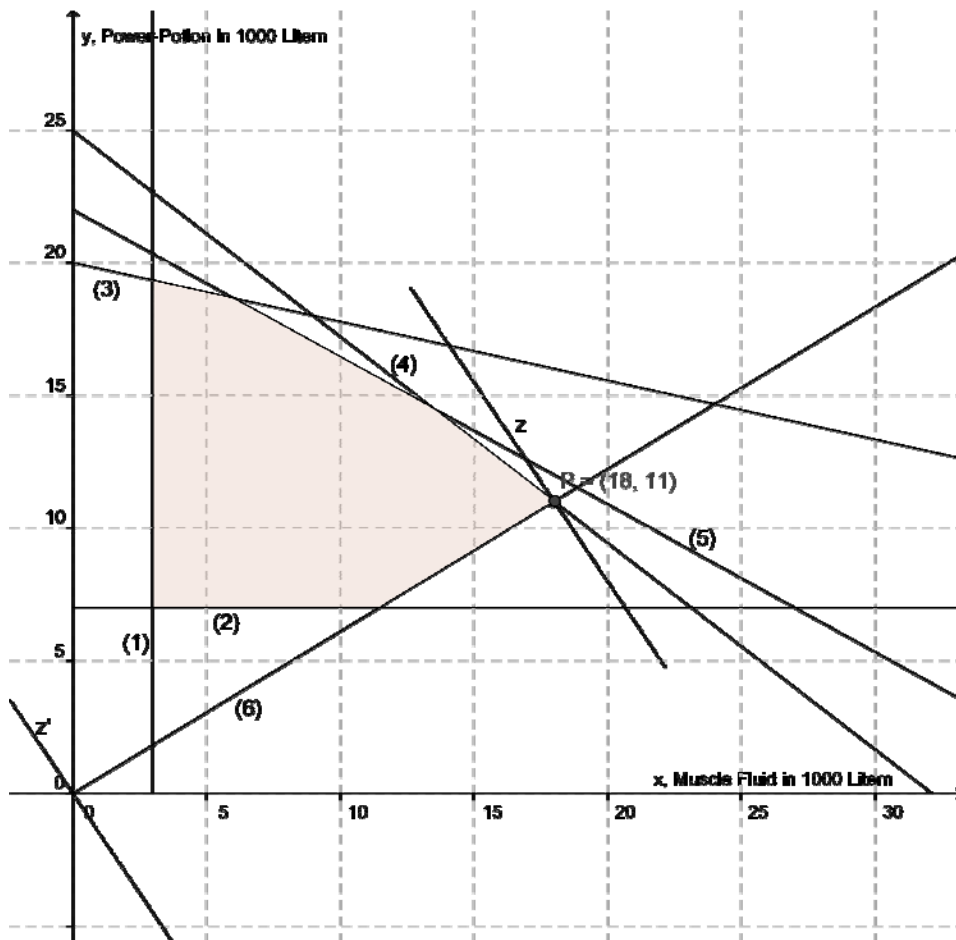
c) Der Gewinn beträgt beim Muscle-Fluid CHF 1.20 pro Liter, beim Power-Potion CHF 0.80 pro Liter. Bestimmen Sie die entsprechende Zielfunktion und zeichnen Sie diese für den maximalen Gewinn in die Grafik ein. (2P)

d) Bestimmen Sie rechnerisch, wie viele Liter von beiden Sportgetränken hergestellt werden müssen, um einen maximalen Gewinn zu erzielen. (2P)

e) Ermitteln Sie den maximalen Gewinn. (1P)

Lösungsdetail	Punkte
a) Lineares Programm und Zielfunktion: x = Muskelquell in kg, y = Hemdenspreng in kg (1) $0,3x + 0,15y \geq 62$ (2) $0,1x + 0,15y \geq 57$ (3) $0,4x + 0,6y \geq 93$ (4) $y \geq 110$ (5) $x \geq 150$ (6) $x + y \leq 320$ $Z_{\min.} = 12x + 17y$	 1 1 1 1 1 1 1

b) Planungspolygon und Zielfunktion



g(1)+g(2) korrekt: 1 Punkt, g(3)-g(6) korrekt: je 1 Punkt
Polygon korrekt gekennzeichnet

5
1

Abzüge:

- Pro fehlende Beschriftung

-1
(max. -2)

c) Zielfunktion bestimmen und in Grafik einzeichnen.

$$z_{\max.} = 1200x + 800y$$

Zielfunktion in Grafik korrekt eingezeichnet.

1
1

d) Bestimmung der Anzahl Liter

$$IL = \{(18/11)\}$$

AWS: Es müssen 18'000 Liter Muscle-Fluid und 11'000 Liter Power-Potion hergestellt werden.

2

e) Berechnung von z_{\max}

$$z_{\max.} = 1200 \cdot 18 + 800 \cdot 11$$

$$z_{\max.} = 30'400$$

AWS: Der maximale Gewinn beträgt CHF 30'400.-.

1

Abzüge:

- Fehlende Antwortsätze

-1

Aufgabe 8

8 Punkte

Kreuzen Sie jeweils die richtige Termumformung resp. das richtige Ergebnis pro Teilaufgabe an:

a)	$\frac{2a}{8} - \frac{21a+8}{4}$	<input type="checkbox"/> $5a+2$ <input checked="" type="checkbox"/> $-2-5a$	<input type="checkbox"/> $5a-2$ <input type="checkbox"/> $2-5a$
b)	$\frac{u^3-4u}{u-2}$	<input type="checkbox"/> u^2+2 <input type="checkbox"/> $-\frac{u^2-4}{2}$	<input type="checkbox"/> u^2-2u <input checked="" type="checkbox"/> u^2+2u
c)	$\left(\frac{3}{7}\right)^{7x+4} = 1$	<input type="checkbox"/> $+\frac{4}{7}$ <input type="checkbox"/> $-\frac{3}{7}$	<input type="checkbox"/> $-\frac{5}{7}$ <input checked="" type="checkbox"/> $-\frac{4}{7}$
d)	$\log_2(16) + \log_4(0.25)$	<input type="checkbox"/> 2 <input checked="" type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 1 <input type="checkbox"/> 0

Lösungsdetails	Punkte
Teilaufgabe richtig Keine Teilpunkte für Berechnungen auf dem Blatt	2 P

Aufgabe 9

8 Punkte

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen.
Die Lösungsvariable ist bei allen Aufgaben x .

a) $5^{2x} : 5^5 = 25$ (2P)

b) $\log_5\left(\frac{1}{\sqrt{125}}\right) = x$ (2P)

c) $2 \cdot 4^x = 3^x$ (2P)

d) $x^2 + ax = 0$ (2P)

Lösungsdetails	Punkte
<p>a) $\Rightarrow 5^{2x-5} = 5^2 \quad \Rightarrow x = \frac{7}{2} \quad IL = \left\{\frac{7}{2}\right\}$</p>	2
<p>b) $\Rightarrow 5^x = \frac{1}{\sqrt{125}}$ $5^x = \frac{1}{5^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \quad IL = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ $5^x = 5^{-\frac{3}{2}}$</p>	2
<p>c) $\Rightarrow 2 = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ $2 = (0,75)^x$ $\log 2 = x \cdot \log(0,75)$ $-2,4094 = x$ $IL = \{-2,4094\}$</p>	2
<p>d) $\Rightarrow x(x+a) = 0 \quad x_1 = 0; \quad x_2 = -a; \quad IL = \{0; -a\}$</p>	2
<p>Abzüge: • Lösungsmenge fehlt</p>	max. -1

Aufgabe 10

8 Punkte

Silvan legte am 1.1.2000 den Betrag von CHF 12'000.-- an. Am 1.1.2009 ist der Kontostand aufgrund von Zinszahlungen bereits um CHF 4'000.-- angewachsen.

- a) Wie gross war in dieser Zeit der Zinssatz (auf 2 Dezimalstellen gerundet). (4P)
- b) Wie gross ist am 1.1.2020 der Betrag, wenn ab dem 1.1.2009 mit einem Zinssatz von 2.75% gerechnet werden kann? (4P)

Lösungsdetail		Punkte
a) Berechnung Zinssatz $q = \sqrt[9]{\frac{16'000}{12'000}} = 1,032481$ $\Rightarrow p = 3,25 \%$ AWS: Der Zinssatz betrug 3,25 %.		3 1
b) Berechnung des Endkapitals $K_n = 16'000 \cdot (1,0275)^{11} = 21'563.54$ Der Betrag beträgt dann CHF 21'563.54.		4
Abzüge:	<ul style="list-style-type: none"> • Gemäss Bewertungshinweise • falsch gerundet • AWS fehlt 	-1 -1