Mathematik

Serie 1

Serie 1 - Lösungen

Prüfungsdauer: 150 Minuten

Max. Punktezahl: 100 Punkte

Bewertungshinweise:

1. Mehrfachlösungen sind nicht gestattet.
2. Als Resultate gelten nur eindeutig gekennzeichnete Zahlen, Mengen oder Sätze
3. Die Diagramme müssen korrekt beschriftet sein.
4. Bei fehlenden Antwortsätzen oder Lösungsmengen werden Punkte abgezogen.
5. Bei den einzelnen Ausrechnungsteilschritten gilt allgemein:
   1. 1 Fehler: Abzug von 50% der maximalen Punktzahl dieses Teilschritts
   2. 2 Fehler: 0 Punkte für diesen Teilschritt
   3. Es gibt keine halben Punkte
6. Ist bei grafischen Lösungen die zugrunde liegende Funktionsgleichung falsch, diese falsche Funktion jedoch korrekt gezeichnet, müssen die Punkte für die grafische Darstellung gegeben werden.

→ Als Grundlage gilt das Dokument „Mathematik: Hinweise zur Lösungsdarstellung“ vom 02.12.1998

Aufgabe 1 **12 Punkte**

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen folgender Gleichungssysteme.
G = IR x IR.

a)

$$\begin{array}{l|rcrcr|} \text{I} & \frac{9}{y} & + & \frac{2}{x} & = & -6 \\ \text{II} & \frac{3}{y} & - & \frac{6}{x} & = & 8 \end{array}$$

Lösungsdetail		Punkte
Definitionsmenge ID_x = IR \ { 0 } ID_y = IR \ { 0 }		1 1
Berechnung der 1. Variable x = -2/3 resp. y = -3		2
Bestimmen der 2. Variablen und der Lösungsmenge x = -2/3 resp. y = -3 IL = {(-2/3 | -3)}		1 1
Abzüge:	• Lösungsmenge fehlt oder formal nicht korrekt	- 1

b)

$$\begin{array}{l|rcl|} \text{I} & (2x+2)(3y-8) & = & (3x+4)(2y-3) \\ \text{II} & \frac{4}{x} & = & -\frac{14}{y-3} \end{array}$$

Lösungsdetail		Punkte
Definitionsmenge ID_x = IR \ { 0 } ID_y = IR \ { 3 }		1 1
Berechnung der 1-ten und 2-ten Variable Es gibt keine Lösung		3
Bestimmen der Lösungsmenge IL = { }		1
Abzüge:	• Lösungsmenge fehlt oder formal nicht korrekt	- 1

Aufgabe 2 — 5 Punkte

Ermitteln Sie jeweils die lineare Funktionsgleichung, wenn folgende Daten gegeben sind:

a) Die Funktion besitzt die Steigung m=-2 und verläuft durch den Punkt P(3.5 / 1.6).

b) Die Punkte P(1.5 / 9) und Q(-3 / -12) liegen auf der Funktionsgeraden.

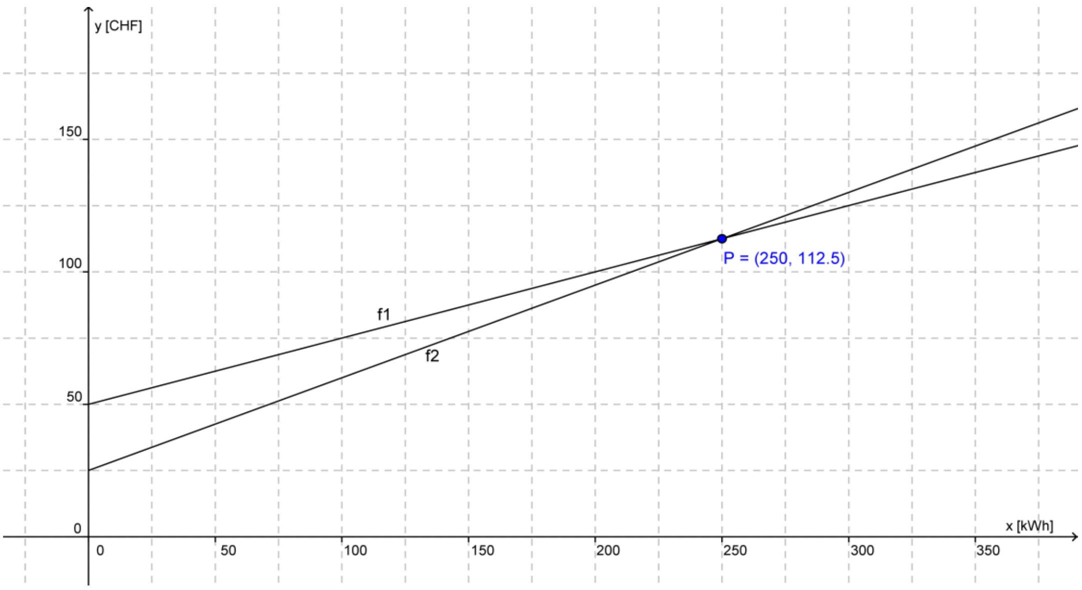
Lösungsdetail		Punkte
a) Funktionsgleichung		
m=-2; P(3.5 / 1.6)		
y=mx+b; Einsetzen =>	b = 8.6	1
Funktionsgleichung:	y = -2x + 8.6	1
b) Funktionsgleichung		
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$	m = 14/3	1
b = 2		1
Funktionsgleichung:	$y = \frac{14}{3}x + 2$	1
Abzüge:	• Gemäss Bewertungshinweise	

Aufgabe 3

10 Punkte

Ein Privathaushalt kann elektrische Energie zu zwei alternativen Tarifen beziehen:
Tarif I: Grundgebühr: 50.-- CHF/Monat und Preis pro kWh: 0.25 CHF.
Tarif II: Grundgebühr: 25.-- CHF/Monat und Preis pro kWh: 0.35 CHF.

a) Ermitteln Sie für beide Tarife die linearen Gesamtkostenfunktionen in Abhängigkeit des monatlichen Energieverbrauchs x.
b) Berechnen Sie den monatlichen Energieverbrauch, für den sich bei beiden Tarifen dieselben Kosten ergeben.
c) Zeichnen Sie beide Kostenfunktionen in ein einziges Koordinatensystem (Der Schnittpunkt muss ersichtlich sein).
d) Ab welchem Jahresverbrauch ist Tarif I günstiger als Tarif II?

Lösungsdetail	Punkte
a) Gesamtkostenfunktionen pro Monat GK gemäss Tarif I: $K_I(x) = 0.25x+50$ GK gemäss Tarif II: $K_{II}(x) = 0.35x+25$	1 1
b) Identische Kosten $0.25x + 50 = 0.35x + 25 \Rightarrow x = 250$ AWS: Bei einem monatlichen Energieverbrauch von 250 KWh sind die Kosten gleich gross	1 1
c) Grafik  	4
d) Jahresverbrauch **12 mal 250 = 3000** Ab einem Verbrauch von mehr als 3000 KWh pro Jahr ist Tarif I günstiger als Tarif II	1 1
Abzüge: • Schnittpunkt nicht ersichtlich oder ungenau • Fehlende Achsenbeschriftung • Funktionen in Grafik nicht beschriftet	-1 -1 -1

Aufgabe 4 **8 Punkte**

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung. G= IR.

$$2x^2 - 7x = 2x$$

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung. G= IR.

$$(x+8)(x-7) = 2x$$

c) Bestimmen Sie die Definitions- und die Lösungsmenge der folgenden Gleichung. G= IR.

$$\frac{x+2}{x^2+4x+3} = 1$$

Lösungsdetail		**Punkte**
a) ID = IR $2x^2 - 9x = x(2x-9) = 0$ $\Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 4,5$ $\Rightarrow L = \{0\,; 4.5\}$		2
Abzüge:	• Gemäss Bewertungshinweise	
b) ID = IR $(x+8)(x-7) = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 56 = 0$ $\Rightarrow x_1 = -7 \quad \vee \quad x_2 = 8$ $\Rightarrow L = \{-7\,; 8\}$		2
Abzüge:	• Gemäss Bewertungshinweise	
c) ID = IR \ { -1;-3 } $\frac{x+2}{x^2+4x+3} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3x + 1 = 0$ $\Rightarrow \quad x_1 = -0.38196... \quad \vee \quad x_2 = -2.618...$ $\Rightarrow L = \{x_1\,; x_2\}$		4
Abzüge:	• Definitionsmenge falsch	-1

Aufgabe 5

4 Punkte

Bei gleichzeitiger Einschaltung von drei Produktionsanlagen kann ein Auftrag in 5 Stunden erledigt werden. Wie lange benötigt jeder Automat allein, wenn der zweite Automat 5 Stunden weniger als der erste braucht und der dritte Automat doppelt so lang wie der erste?

Stellen Sie die ***nur*** zugehörige Gleichung auf **ohne** sie zu lösen. Definitionsmenge und Lösungen sind ***nicht*** verlangt!

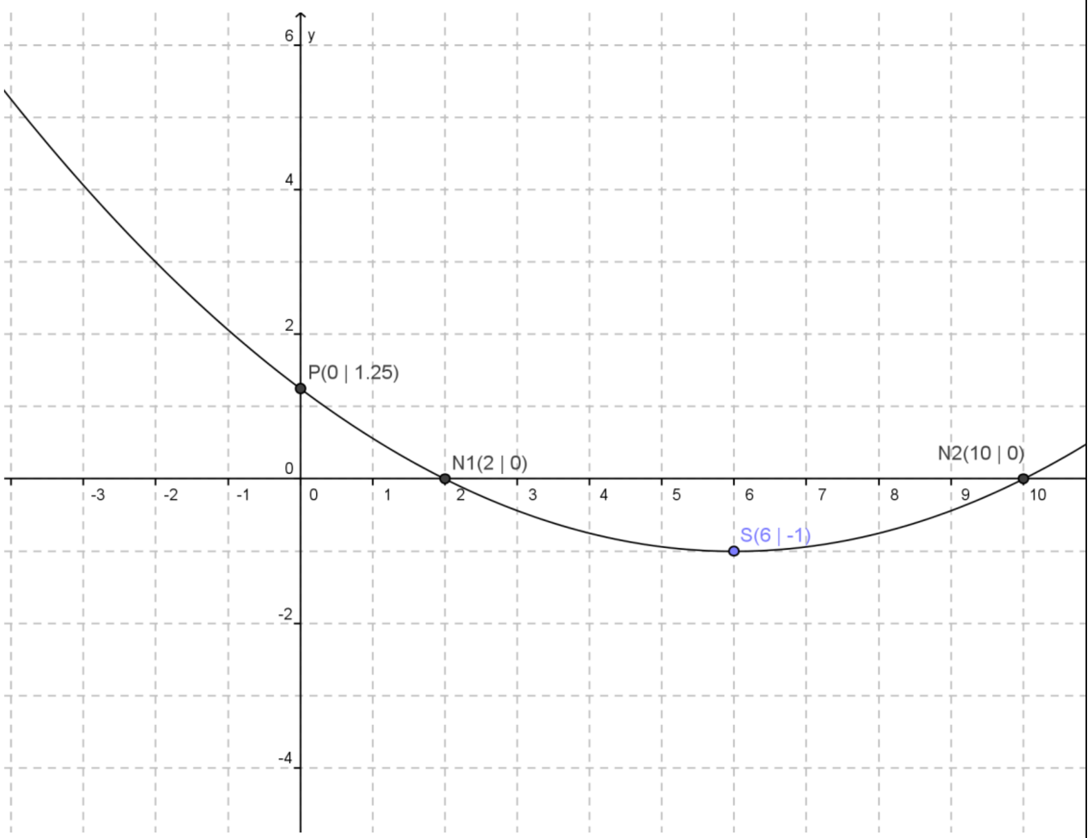
Lösungsdetail		**Punkte**
Gleichung aufstellen Automat 1: x Stunden alleine Automat 2: x - 5 Stunden alleine Automat 3: 2x Stunden alleine		2
$\frac{5}{x}+\frac{5}{x-5}+\frac{5}{2x}=1$		2
Abzüge:	• Gemäss Bewertungshinweise	

Aufgabe 6

9 Punkte

Gegeben sei folgende Funktion: $y = \frac{1}{16}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

Bestimmen Sie von dieser Parabel die Nullstellen, den Scheitelpunkt sowie den Schnittpunkt mit der Y-Achse. Zeichnen Sie diese Parabel und markieren Sie die berechneten Punkte.

Lösungsdetail	**Punkte**
	1 (P) 1 (N1) 1 (N2) 2 (S) 4 (Grafik)

Abzüge:	• Je falsch berechneter Punkt	-1
	• Je falsch eingezeichneter Punkt	-1
	• Fehlende Achsenbeschriftung	-1
	• Nicht beschriftete Punkte	-1

Aufgabe 7

4 Punkte

Eine Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2 + bx + c$ geht durch die Punkte P (0/0) und Q (-5/10). Bestimmen Sie die Zahlenwerte für die Koeffizienten b und c.

Lösungsdetail		**Punkte**
P einsetzen ➔ c = 0		2
Q einsetzen ➔ 10=50-5b ➔ b = 8		2
Abzüge:	• Gemäss Bewertungshinweise	

Aufgabe 8 **20 Punkte**

In einer Fabrik werden sowohl Rollkoffer (x) als auch Taschen mit Rollen (y) hergestellt. Beide Arten werden aus dem gleichen Material gefertigt. Für einen Koffer werden 1,9 m Aussenmaterial und 1,2 m Futterstoff benötigt, für eine Tasche hingegen werden 1,5 m des Aussenmaterials, aber wegen der vielen Innentaschen ganze 2,8 m Futterstoff verarbeitet. Der Lagerbestand an Futterstoff beläuft sich auf 180 m, derjenige an Aussenmaterial auf 250 m. Geplant ist eine Gesamtproduktion von höchstens 230 Gepäckstücken. Der Anteil an Taschen soll mindestens 30% der Gesamtproduktion betragen. Für die Rollkoffer hat die Firma bereits einen Liefervertrag von 50 Stück vorliegen. Der Gewinn für eine Tasche beträgt CHF 82.--. Pro Koffer erzielt die Firma dagegen CHF 30.-- weniger Gewinn.

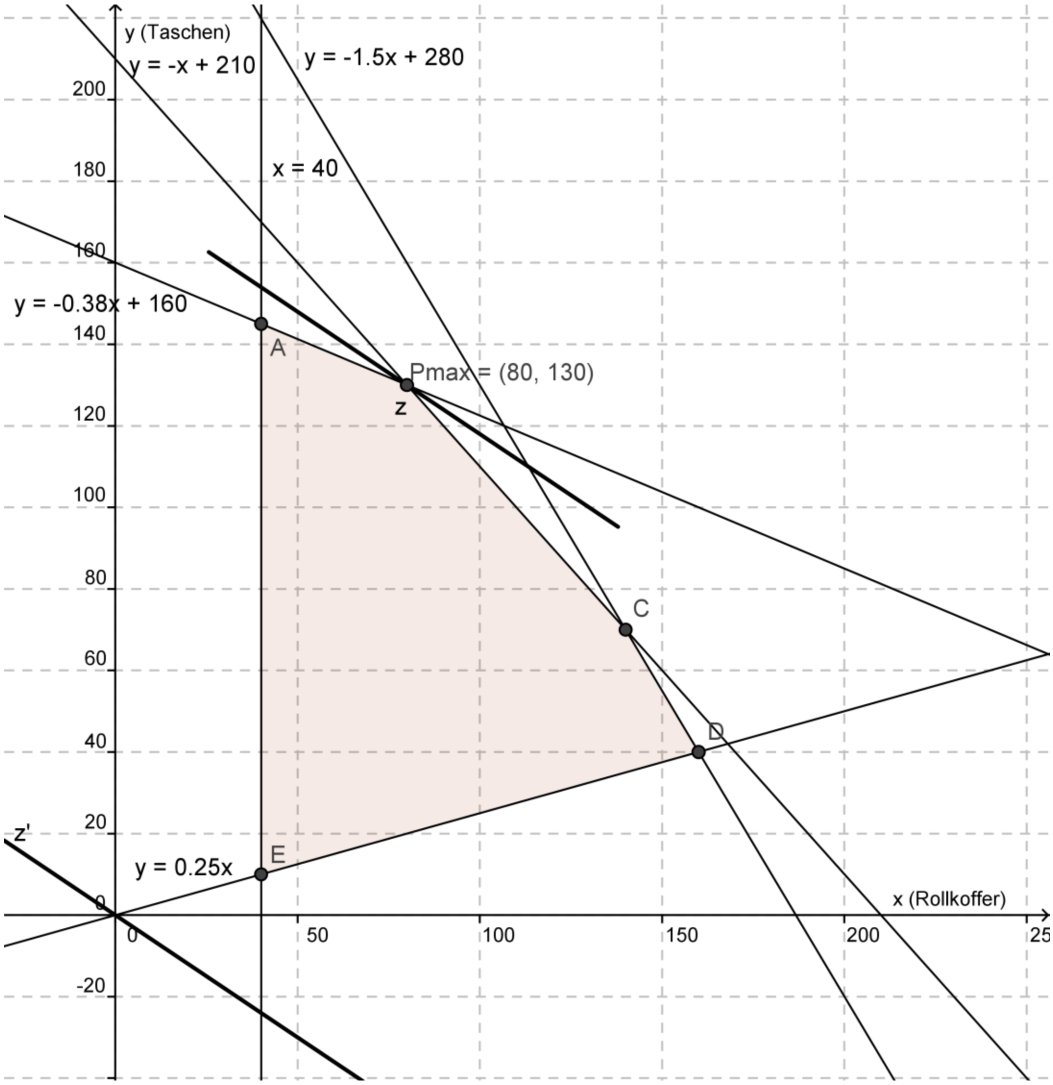
a) Erstellen Sie das lineare Programm inkl. der Zielfunktion für einen maximalen Gewinn **(keine Grafik)**.

b) Aufgrund verschiedener Engpässe in der Stofflieferung sowie Änderungen in der Produktion musste das lineare Programm folgendermassen umgestellt werden:
(1) $2{,}7x + 1{,}8y \leq 504$
(2) $1{,}5x + 4y \leq 640$
(3) $x + y \leq 210$
(4) $4y \geq x$
(5) $x \geq 40$
(z) $z = 45x + 75y$
Zeichnen Sie das Planungspolygon und die Zielfunktion für den maximalen Gewinn.

c) Wie viele Koffer und wie viele Taschen müssen hergestellt werden, um einen maximalen Gewinn zu erzielen?

d) Die Produktionsziele wurden geändert: neu möchte man bei der Herstellung von 140 Koffer und 70 Taschen den maximalen Gewinn erreichen. Bestimmen Sie eine mögliche Steigung der neue Zielfunktion.

Lösungsdetail	Punkte
x: Rollkoffer y: Taschen	
a) Lineares Programm	
$x \geq 0,\ y \geq 0$	
(1) $1{,}9x + 1{,}5y \leq 250$	2
(2) $1{,}2x + 2{,}8y \leq 180$	2
(3) $x + y \leq 230$	1
(4) $y \geq 0{,}3(x+y)$	2
(5) $x \geq 50$	1
$z_{max} = 52x + 82y$	1

b) Planungspolygon und Zielfunktion		
 		
Pro Grenzgerade	je 1 Punkt	5
Polygon korrekt gekennzeichnet		1
Z korrekt gezeichnet daraus P_{max} bestimmt und gekennzeichnet		1
Abzüge:	• Pro fehlende Beschriftung	-1 (max. -3)
c) Maximum bestimmen		
P_{max} korrekt abgelesen oder berechnet x =80 y = 130 Es müssen 80 Koffer und 130 Taschen hergestellt werden.		2
d) Mindestgewinn pro Koffer (= g)		
Neue Zielfunktion: z = gx + 75y Es muss gelten: $-1.5 \quad < \quad m \quad < \quad -1$		2
Abzüge:	• Fehlender Antwortsatz	-1

Aufgabe 9

14 Punkte

Kreuzen Sie jeweils die richtige Termumformung pro Teilaufgabe an:

a)	$\frac{x^2-1}{1-x}$	☐ $x+1$ ☐ $x-1$	☒ $-x-1$ ☐ $-x+1$	2
b)	$\frac{(a-b)^2}{(a^2-b^2)}\cdot\frac{(a+b)^2}{(a^2+b^2)}$	☒ $\frac{(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)}$ ☐ -1	☐ $\frac{(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)}$ ☐ $+1$	2
c)	$\frac{\frac{(a+b)}{(a-b)}-1}{1-\frac{a}{a-b}}$	☐ $\frac{a+b}{a}$ ☒ -2	☐ $\frac{a+b}{-a}$ ☐ 0	2
d)	$-a^{-\frac{3}{4}}$	☐ $\sqrt[3]{-a^4}$ ☐ $\frac{1}{\sqrt[3]{-a^4}}$	☐ $-\sqrt[4]{a^3}$ ☒ $\frac{-1}{\sqrt[4]{a^3}}$	2
e)	$\frac{\sqrt[2]{n^3}}{\sqrt[3]{n^2}}$	☒ $\sqrt[6]{n^5}$ ☐ 1	☐ $\sqrt[6]{n^{10}}$ ☐ -1	2
f)	$\log_7\frac{1}{49}$	☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ 2	☐ $\frac{1}{2}$ ☒ -2	2
g)	$\log_a 2+\log_a 3-\log_a 4$	☒ $\log_a 1{,}5$ ☐ $\log_a 1$	☐ $\log_a 0{,}75$ ☐ $\log_a 0{,}5$	2

Aufgabe 10 **8 Punkte**

Ein Lottospieler gewinnt CHF 15'000.--, die er auf sein Bankkonto einzahlt. Er lässt das Geld 8 Jahre lang liegen und hat nach dieser Zeit CHF 5'000.-- mehr auf dem Konto als zum Zeitpunkt der Einzahlung.

e) Berechnen Sie den jährlichen Zinssatz.

f) Welchen Betrag hätte der Lottospieler 3 Jahre nach seinem Gewinn zusätzlich einzahlen müssen, damit er 8 Jahre nach dem Gewinn CHF 30'000.-- auf seinem Konto hätte? (Zinssatz aus Teil a))

g) In welcher Zeit wäre sein ursprünglicher Lottogewinn bei 2,75% Zins um 50% gewachsen?

Lösungsdetail		**Punkte**
a) Zinssatz 20000=15000(1+i)^8 ➔ i = 0,036614… AWS: Der Jahreszinssatz beträgt ca. 3,66%		2
b) Betrag nach 3 Jahren 15000(1+i)^8 + x(1+i)^5=30000 ➔ x = 8354,362… AWS: Der Lottospieler hätte nach 3 Jahren ca. CHF 8'354,35.-- einzahlen müssen		2 1
c) Erhöhung um 50% 1,5 = 1,0275^n ➔ n = 14,946… AWS: In ca. 15 Jahren hat sich der Lottogewinn um 50% erhöht.		2 1
Abzüge:	• Fehlender Antwortsatz	-1(max. -2)

Aufgabe 11 **6 Punkte**

Eine maschinelle Anlage wird zu einem Barpreis von CHF 150'000.-- zu folgenden Zahlungsbedingungen verkauft: CHF 50'000.-- Anzahlung, Rest in zwei gleich grossen Raten einschliesslich 5,5% Jahreszinsen. Die erste Rate ist nach 2 Jahren, die zweite Rate nach weiteren 2 Jahren fällig. Berechnen Sie die jeweiligen Raten.

Lösungsdetail		**Punkte**
Gleich grosse Raten (= r) 100000*1,055^4 = r*1,055^2 + r ➔ r = 58628,0167… AWS: Die gleich grossen Raten nach 2 und 4 Jahren betragen ca. CHF 58'628.-		4 2
Abzüge:	• Gemäss Bewertungshinweise	