# Mathematik Serie 1

**Serie 1 - Lösungen**

**Prüfungsdauer: 150 Minuten**
**Max. Punktzahl: 100 Punkte**

## Allgemeine Bewertungshinweise:

1. Mehrfachlösungen sind nicht gestattet.

2. Als Resultate gelten nur eindeutig gekennzeichnete Zahlen, Mengen oder Sätze.

3. Die Diagramme müssen korrekt beschriftet sein.

4. Bei fehlenden Antwortsätzen oder Lösungsmengen werden Punkte abgezogen.

⇒ Als Grundlage gilt das Dokument "Mathematik: Hinweise zur Lösungsdarstellung" vom 02.12.1998.

## Spezielle Bewertungshinweise:

5. Bei den einzelnen Ausrechnungsteilschritten gilt allgemein:
   - 1 Fehler: Abzug von 50% der maximalen Punktzahl dieses Teilschritts.
   - 2 Fehler: 0 Punkte für diesen Teilschritt
   - Es gibt keine halben Punkte.

6. Ist bei grafischen Lösungen die zugrundeliegende Funktionsgleichung falsch, diese falsche Funktion aber korrekt gezeichnet, müssen die Punkte für die grafische Darstellung gegeben werden.

## Aufgabe 1

**10 Punkte**

Lösen Sie folgende Gleichung in G = IR.

$$x = \frac{7x + 6}{x + 6} + \frac{x}{3}$$

### Lösung

| **Lösungsdetail** | **Punkte** |
|---|---|
| **Definitionsmenge**<br>$ID = IR \setminus \{-6\}$ | 1 |
| **Umwandeln in Normalform**<br>$2x^2 - 9x - 18 = 0$ | 4 |
| **Gleichung lösen**<br>$x_1 = -1.5$<br>$x_2 = 6$ | <br>2<br>2 |
| **Lösungsmenge**<br>$IL = \{-1.5\ ;\ 6\}$ | 1 |

## Aufgabe 2

**12 Punkte**

a) Ein Kapital von CHF 1'000.-- verzinst sich mit p = 9%.
Nach welcher Zeit hat sich das Kapital verdreifacht? (Runden Sie auf zwei Dezimalstellen.)

b) Frau Krause hat ein Grundstück gekauft und folgende Zahlungen vereinbart:
CHF 20'000.-- sofort, CHF 50'000.-- 3 Jahre und CHF 50'000.-- 5 Jahre nach dem Kauf.
Welche Summe hätte sie sofort bezahlen müssen, wenn sie mit einem Zinssatz von 6% rechnet? (Runden Sie auf 5 Rappen genau.)

c) Petra besitzt heute auf ihrem Bankkonto ein Vermögen von CHF 5'500.--. Vor 5 Jahren hatte sie einen Betrag von CHF 2'460.-- abgehoben. Nach diesem Bezug verblieben CHF 5'043.-- auf dem Konto.
Wie hoch war das Bankvermögen von Petra vor 9 Jahren, wenn der Zinssatz während der gesamten Zeit gleich geblieben ist?

### Lösung

| Lösungsdetail | | Punkte |
|---|---|---|
| **a) Kapitalverdreifachung**<br>$n = \dfrac{\lg K_n - \lg K_0}{\lg q} = \dfrac{\lg 3'000 - \lg 1'000}{\lg 1.09}$ | | 2 |
| $n = 12.7482...$ Jahre<br>Nach 12.75 Jahren hat sich das Kapital verdreifacht. | | 2 |
| **Abzüge** | • Falsch gerundet | –1 |
| | • Fehlender Antwortsatz | –1 |

| | | |
|---|---|---|
| **b) Barwertberechnung**<br>Barwert Kapital 1: 20'000.-- | | |
| Barwert Kapital 2: $K_0 = \dfrac{K_n}{q^n} = \dfrac{50'000}{1.06^3} = 41'980.9641...$ | | 1 |
| Barwert Kapital 3: $K_0 = \dfrac{K_n}{q^n} = \dfrac{50'000}{1.06^5} = 37'362.9086...$ | | 1 |
| Gesamtbarwert:<br>20'000.-- + 41'980.9641... + 37'362.9086... = 99'343.8727...<br>Sie hätte CHF 99'343.85 sofort bezahlen müssen. | | 2 |
| **Abzüge** | • Nicht auf 5 Rappen gerundet | –1 |
| | • Fehlender Antwortsatz | –1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **c)** | **Zinssatz / Barwertberechnung**<br>$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_o}} = \sqrt[5]{\frac{5'500}{5'043}} = 1.01750076...$<br>➔ $p = 1.75\%$<br>$K_0 = \frac{K_n}{q^n} = \frac{5'043 + 2'460}{1.0175^4} = 6'999.9876...$<br>Das Vermögen vor 9 Jahren betrug **CHF 7'000.--**. | | 2<br><br>2 |
| | **Abzüge** | • Nicht auf 5 Rappen gerundet<br>• Fehlender Antwortsatz | –1<br>–1 |

## Aufgabe 3

**12 Punkte**

Mischt man die Kaffeesorten Robusta und Arabica im Verhältnis 2 : 3, entsteht die Mischung Exquisito zum Kilopreis von CHF 12.60. Für die Mischung Amabile nimmt man 3 Mal so viel Arabica wie Robusta. Der Kilopreis dieser Mischung beträgt CHF 13.50.
Wie viel kostet je 1 kg der Kaffeesorten Robusta und Arabica?

### Lösung

| Lösungsdetail | | Punkte |
|---|---|---|
| Variablendefinition:<br>x: Kilopreis Robusta; y: Kilopreis Arabica | | |
| (1) $2x + 3y = 5 \cdot 12.60$ oder (1) $0.4x + 0.6y = 12.60$ | | 3 |
| (2) $x + 3y = 4 \cdot 13.50$ oder (2) $0.25x + 0.75y = 13.50$ | | 3 |
| 1. Variable: $x = 9$ | | 4 |
| 2. Variable: $y = 15$ | | 2 |
| Robusta kostet CHF 9.-- pro kg, Arabica kostet CHF 15.-- pro kg. | | |
| **Abzüge** | • Fehlende Variablendefinition | –1 |
| | • Fehlender Antwortsatz | –1 |

## Aufgabe 4

**18 Punkte**

Ein Textilunternehmen produziert T-Shirts, die im Grosshandel zu CHF 7.35 pro Stück abgesetzt werden. Die Fixkosten bei der Produktion betragen CHF 85'000.--.
Werden 20'000 Stück produziert, belaufen sich die Gesamtkosten auf CHF 170'000.--.

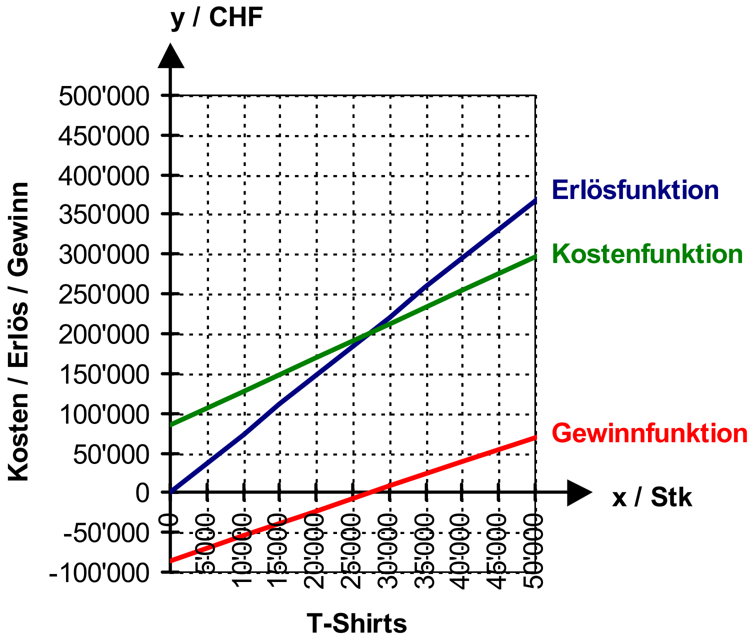
a) Bestimmen Sie die Kosten- und die Erlösfunktion.
b) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion.
c) Ab welcher Stückzahl erzielt die Firma einen Gewinn (Gewinnschwelle, Break-even)?
d) Stellen Sie die drei Funktionen in **einer** Grafik dar.

### Lösung

| Lösungsdetail | Punkte |
|---|---|
| x: Anzahl T-Shirts<br>y: Kosten / Erlös / Gewinn in CHF | |
| **a) Kosten- und Erlösfunktion** | |
| • **Kostenfunktion** | |
| Fixkosten = CHF 85'000.--<br>Variabler Anteil = ( 170'000 – 85'000 ) / 20'000 = CHF 4.25 | |
| $f_K(x): \; y = 4.25x + 85'000$ | 4 |
| • **Erlösfunktion** | |
| $f_E(x): \; y = 7.35x$ | 2 |

| | |
|---|---|
| **b) Gewinnfunktion**<br>$f_G(x): \; y = f_E(x) - f_K(x) \;\rightarrow\; f_G(x): \; y = 3.1x - 85'000$ | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| **c) Gewinnschwelle**<br>$f_K(x) = f_E(x)$ oder $f_G(x) = 0$<br>$4.25x + 85'000 = 7.35x$    $3.1x - 85'000 = 0$<br>$3.1x = 85'000$<br>$x = 27'419.35...$<br>Die Gewinnschwelle liegt bei 27'420 Stück. | | 4 |
| **Abzüge** | Nicht gerundet oder abgerundet | –1 |

| | | |
|---|---|---|
| **d) Grafische Darstellung**   | | |
| Je Gerade | 2 Punkte | 6 |
| **Abzüge** | • Je fehlende Beschriftung | –1 (max. –3) |
| | • Fehlende Achsenbeschriftung | –1 |

## Aufgabe 5

**16 Punkte**

a) Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

$$\frac{(a-b)^3}{(b-a)^4}$$

**Lösung**

| **Lösungsdetail** | **Punkte** |
|---|---|
| $\frac{(a-b)^3}{(-1)^4\,(a-b)^4} = \frac{1}{a-b}$ | 2 (keine Teilpunkte) |

b) Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

$$\frac{(2m-2p)^2}{m-p}$$

**Lösung**

| **Lösungsdetail** | **Punkte** |
|---|---|
| $\frac{2^2\,(m-p)^2}{m-p} = 4\,(m-p)$ | 2 (keine Teilpunkte) |

c) Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

$$a^{\frac{m^2-q^2}{m+q}} \; : \; a^{m+q}$$

**Lösung**

| **Lösungsdetail** | **Punkte** |
|---|---|
| $a^{\frac{(m+p)(m-q)}{m+q}} \; : \; a^{m+q} \; = \; a^{m-q-(m+q)} \; = \; a^{-2q}$ | 4 |

d) Lösen Sie folgende Gleichung in G = IR. (Runden Sie auf 2 Dezimalstellen.)

$$8^{x+3} = 100$$

**Lösung**

| **Lösungsdetail** | | **Punkte** |
|---|---|---|
| $(x+3) \bullet \lg 8 = \lg 100$ oder $\log_8 100 = x + 3$ | | 2 |
| $x = \dfrac{\lg 100}{\lg 8} - 3 = -0.7853...$ | | |
| $\mathbb{L} = \{-0.79\}$ | | 2 |
| **Abzüge** | • Falsch gerundet | –1 |
| | • Fehlende Lösungsmenge | –1 |

e) Kreuzen Sie die korrekten Lösungsmengen der linearen Aussageformen an.
(G = IR / D = IR)

| | | | | Punkte |
|---|---|---|---|---|
| e1) | $2x+1 = x+1$ | IL = { } | ☐ | 1 |
| | | IL = IR | ☐ | |
| | | IL = {0} | ☑ | |
| | | IL = {2} | ☐ | |
| e2) | $5x = 5x$ | IL = { } | ☐ | 1 |
| | | IL = IR | ☑ | |
| | | IL = {0} | ☐ | |
| | | IL = {1} | ☐ | |
| e3) | $2x + 3 = 2x - 3$ | IL = { } | ☑ | 1 |
| | | IL = IR | ☐ | |
| | | IL = {0} | ☐ | |
| | | IL = {1} | ☐ | |
| e4) | $5x - 3 = 5x - 3$ | IL = { } | ☐ | 1 |
| | | IL = IR | ☑ | |
| | | IL = {0} | ☐ | |
| | | IL = {1} | ☐ | |

## Aufgabe 6

**16 Punkte**

Bestimmen Sie bei der quadratischen Funktion f: $y = x^2 - 6x + 13$

a) allfällige Nullstellen
b) den Scheitelpunkt
c) die Schnittpunkte mit der Geraden g: $y = x + 3$.

d) Veranschaulichen Sie die beiden Funktionen in einer Grafik und zeichnen Sie die berechneten Punkte ein.

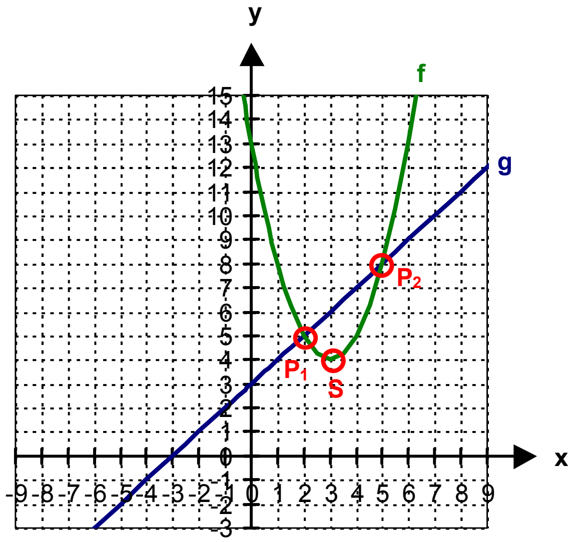
### Lösung

| Lösungsdetail | Punkte |
|---|---|
| **a) Nullstellen** | |
| $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 13} = 3 \pm \sqrt{-4}$ | |
| Erkennen der negativen Diskriminante:<br>$IL = \{ \}$ oder $\sqrt{-4}$ ist in IR nicht möglich | 2 |
| Interpretation:<br>Parabel besitzt keine Nullstellen | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| **b) Scheitelpunkt berechnen** | | |
| $x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = \underline{3}$ | | |
| $y_s = c - \frac{b^2}{4a} \rightarrow y_s = 13 - \frac{36}{4} = \underline{4}$ | | |
| S ( 3 / 4 ) | | 2 |
| **Abzüge** | Scheitelpunkt nicht in Koordinatenschreibweise | –1 |

| | | |
|---|---|---|
| **c) Schnittpunkte berechnen** | | |
| $x^2 - 6x + 13 = x + 3$<br>$x^2 - 7x + 10 = 0$<br>$(x-2)(x-5) = 0$ | | |
| $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ | | 2 |
| $y_1 = 5$, $y_2 = 8$ | | |
| $P_1$ ( 2 / 5 ); $P_2$ ( 5 / 8 ) | | 2 |
| **Abzüge** | Punkte nicht in Koordinatenschreibweise | –1 |

**d) Grafische Darstellung**




| | | |
|---|---|---|
| | Parabel | 4 |
| | Gerade | 2 |
| **Abzüge** | • Falsches Parabelbild (Spitz, oben wieder schliessend, nicht symmetrisch...) | max. –2 |
| | • Fehlende Achsenbeschriftung | –1 |
| | • Berechnete Punkte nicht gekennzeichnet | –1 |

## Aufgabe 7 **16 Punkte**

a) Eine Kleiderfabrik bestellt zwei verschieden farbige Stoffe. Daraus stellt sie einfarbige (x) und bunte (y) Hosen her. Der einfarbige Stoff kostet CHF 9.--, der bunte CHF 12.50 pro Laufmeter. Für eine Hose benötigt man 1.2 Laufmeter Stoff.
Bei den einfarbigen Hosen entsteht ein Gewinn von CHF 70.--, bei den bunten ein Gewinn von CHF 55.--.

Von jeder Farbe sollen mindestens 350 Hosen, insgesamt aber mindestens 800 hergestellt werden.
Es sollen höchstens doppelt so viele bunte wie einfarbige Hosen produziert werden.
Die Kosten für die Stoffe dürfen CHF 54'000.-- nicht übersteigen.
Stellen Sie das lineare Programm (Zielfunktion und Nebenbedingungen) auf.
**(Keine Grafik)**

b) Für ein anderes Hosenmodell sieht das lineare Programm wie folgt aus:

(1) $12.5x + 15y \leq 36'000$

(2) $y \geq 400$

(3) $x + y \geq 1'800$

(4) $x \geq 2y$

(z) $z = 50x + 80y$

Zeichnen Sie das Planungspolygon und bestimmen Sie mit Hilfe der Zielfunktion den maximalen Gewinn.

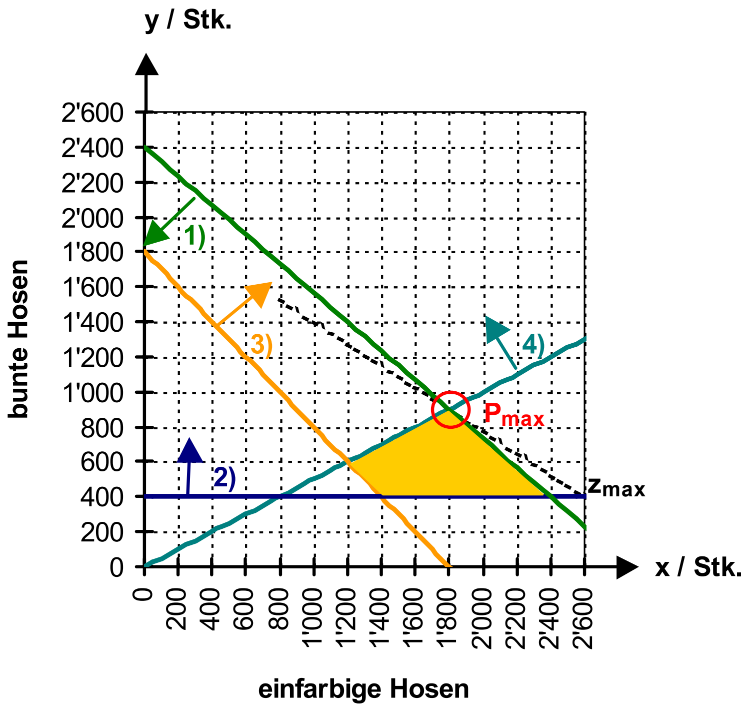
c) Wie viele Hosen der beiden Farben müssen hergestellt werden, damit der Gewinn möglichst gross wird?

d) Wie gross ist dieser maximale Gewinn?

## Lösung

| **Lösungsdetail** | **Punkte** |
|---|---|
| **a)** x: Anzahl einfarbige Hosen<br>y: Anzahl bunte Hosen | |
| **Lineares Programm** | |
| (1) $x \geq 350$ | 1 |
| (2) $y \geq 350$ | 1 |
| (3) $x + y \geq 800$ | 1 |
| (4) $2x \geq y$ | 2 |
| (5) $10.8x + 15y \leq 54'000$ | 1 |
| (z) Gewinn $= 70x + 55y$ | 1 |

**b) Planungspolygon und Zielfunktion**




| | | |
|---|---|---|
| Pro Grenzgerade: | je 1 Punkt | 4 |
| Planungspolygon korrekt gekennzeichnet | | 1 |
| z korrekt gezeichnet | | 1 |
| $P_{max}$ bestimmt und gekennzeichnet | | 1 |
| **Abzüge** | Pro fehlende Beschriftung | –1<br>(max. –3) |

| | | |
|---|---|---|
| **c) Maximum bestimmen**<br>$P_{max}$ berechnet oder korrekt abgelesen<br>(1) $12.5x + 15y = 36'000$<br>(4) $x = 2y$<br>$25y + 15y = 36'000$<br>$40y = 36'000$<br>$y = 900$ $\quad$ $x = 1'800$<br>Die Fabrik erzielt einen maximalen Gewinn bei der Herstellung von 1'800 einfarbigen und 900 bunten Hosen. | | 1 |
| **Abzüge** | Fehlender Antwortsatz | –1 |

| | | |
|---|---|---|
| **d) Gewinnberechnung**<br>$z = 50 \bullet 1'800 + 80 \bullet 900 = 162'000$<br>Der maximale Gewinn beträgt CHF 162'000.--. | | 1 |
| **Abzüge** | Fehlender Antwortsatz | –1 |