Mathematik Serie 1

Serie 1 – Lösungen

Prüfungsdauer: 150 Minuten
Max. Punktzahl: 100 Punkte

Allgemeine Bewertungshinweise:

1. Mehrfachlösungen sind nicht gestattet.

2. Als Resultate gelten nur eindeutig gekennzeichnete Zahlen, Mengen oder Sätze.

3. Die Diagramme müssen korrekt beschriftet sein.

4. Bei fehlenden Antwortsätzen oder Lösungsmengen werden Punkte abgezogen.

⇒ Als Grundlage gilt das Dokument «Mathematik: Hinweise zur Lösungsdarstellung» vom 02.12.1998.

Spezielle Bewertungshinweise:

5. Bei den einzelnen Ausrechnungsteilschritten gilt allgemein:
   - 1 Fehler: Abzug von 50% der maximalen Punktzahl dieses Teilschritts.
   - 2 Fehler: 0 Punkte für diesen Teilschritt

6. Ist bei grafischen Lösungen die zugrundeliegende Funktionsgleichung falsch, diese falsche Funktion aber korrekt gezeichnet, müssen die Punkte für die grafische Darstellung gegeben werden.

«Wir bewerten diejenigen Lerninhalte, welche wir effektiv prüfen wollen»

Aufgabe 1

8 Punkte

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichung in der Grundmenge $\mathbb{G}=\mathbb{R}$.

$$\frac{32}{x^2-16}+1=\frac{4}{x-4}$$

Lösungsvorschlag:

	Teilpunkte
Definitionsmenge $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-4;4\}$	1
Umformen zur allg. quadratischen Form oder faktorisieren: $x^2-4x=0$ oder $x(x-4)=0$	4
Lösungsberechnung mittels Formel oder Ausklammern: $x_1=0; x_2=4$	2
Ausscheiden von 4 als Lösung aufgrund der Definitionsmenge: $\Rightarrow \mathbb{L}=\{0\}$	1
Abzüge: fehlende Lösungsmenge: - 2 Punkte	
Total Punkte	8

Aufgabe 2

10 Punkte

Eine Treuhandfirma bestellt bei einem Importeur 20 neue Computer und 15 Notebooks; der Kostenvoranschlag beläuft sich auf CHF 130 000.--.
Wegen eines Irrtums werden jedoch 15 Computer und 20 Notebooks geliefert, wodurch sich die Rechnung um CHF 2 500.-- erhöht.

Berechnen Sie den Stückpreis der Computer und Notebooks.

Lösungsvorschlag:

	Teilpunkte
Sei x = Preis pro Computer und y= Preis pro Notebook. Formulierung des Gleichungssystems: $\begin{vmatrix} 20x + 15y = 130'000 \\ 15x + 20y = 132'500 \end{vmatrix}$	4
Lösen der ersten Variable: $y = 4000$	4
Lösen der zweiten Variable: $x = 3500$	2
„Ein Computer kostet CHF 3500.-- und ein Notebook CHF 4000.--“	
Abzüge: Fehlender Antwortsatz: -1 Punkt	
Totalpunkte	10

Aufgabe 3

10 Punkte

Lösen Sie folgendes Gleichungssystem in der Grundmenge $\mathbb{G}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ auf:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{y-3} = 1 \\ \dfrac{6}{x+1} + \dfrac{1}{y-3} = 5 \end{array} \right|$$

Lösungsvorschlag:

	Teilpunkte
Definitionsmengen bestimmen (je 1 Punkt) $\mathbb{D}_x = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\mathbb{D}_y = \mathbb{R} \setminus \{3\}$	2
Lösen der 1 .Variablen: x=0.25	4
Lösen der 2 .Variablen: y=8	4
Lösung: $\mathbb{L} = \{(0.25/8)\}$	
Abzug: wenn Lösung fehlt oder formell nicht korrekt als Zahlenpaar (Klammern!) dargestellt ist: -2 Punkte	
Total der Punkte	10

Aufgabe 4

14 Punkte

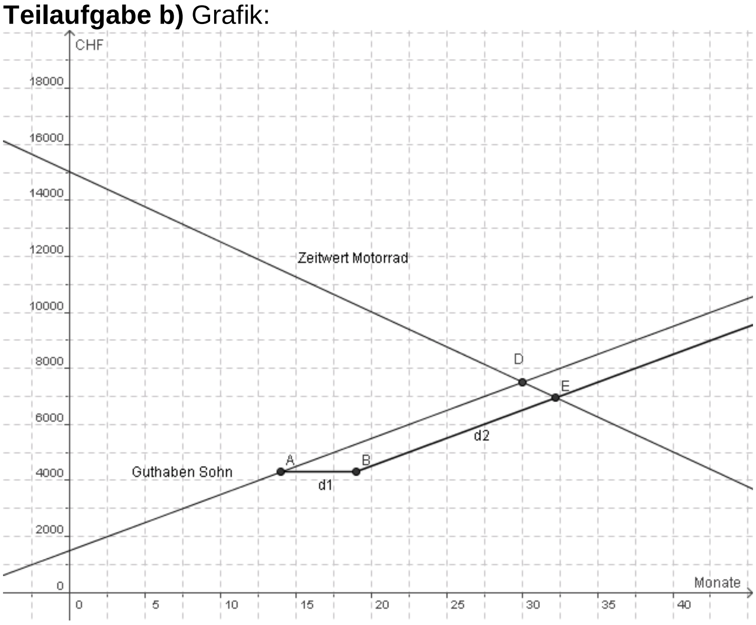
Der Vater kauft sich für CHF 15'000.-- ein neues Motorrad, das pro Jahr gleichmässig CHF 3'000.-- an Wert verliert.
Vater und Sohn schliessen beim Kauf des Motorrads eine Abmachung: der Sohn wird dem Vater zu einem späteren Zeitpunkt das Motorrad abkaufen. So beginnt der Sohn beim Kauf des Motorrads mit Sparen. Er hat bereits CHF 1'500.— und kann Ende Monat jeweils weitere CHF 200.— auf die Seite legen.

a) Stellen Sie die Funktionsgleichungen für den Zeitwert des Motorrades und für das ersparte Guthaben des Sohnes auf (ohne Berücksichtigung des Zinseszinses).
b) Stellen Sie die beiden Funktionen grafisch dar **(beiliegendes Millimeterpapier benutzen).**
c) Von wann an kann der Sohn dem Vater das Motorrad zum Zeitwert abkaufen?
(Zeitwert, auch Restwert genannt = Neupreis minus kumulierte lineare Abschreibungen)

d) Nach 14 Monaten sparen muss der Sohn für 5 Monate in die Rekrutenschule. Während dieser Zeit kann er nichts auf die Seite legen. Anschliessend kann er wie vorgängig weiter sparen. Zeichnen Sie den neuen Sachverhalt ins gleiche Diagramm ein.

e) Bestimmen Sie den neuen Zeitpunkt des Kaufs möglichst genau.

Lösungsvorschlag:

	Teilpunkte
Teilaufgabe a) Darstellung der beiden Funktionsgleichungen: 1. Zeitwert des Motorrads: $y = -250x + 15'000$ wobei x die Anzahl Monate ist und y den Zeitwert in CHF darstellt. 2. Guthaben des Sohns: $y = 200x + 1500$ wobei x die Anzahl Monate ist und y das Guthaben in CHF darstellt.	**2** **2**
Teilaufgabe b) Grafik: 	**4**
Teilaufgabe c) Aus Grafik abgelesen (Punkt D) oder berechnet: „Nach 2 Jahren und 6 Monaten kann er das Motorrad abkaufen."	**2**
Teilaufgabe d) Korrekte Darstellung der Funktion d1 und d2 in der Grafik b)	**2**
Teilaufgabe e) Nach 2 Jahren und gut 8 Monaten kann er nun das Motorrad kaufen. (Punkt E, exakt 32,22 Monate)	**2**
Abzüge: Fehlende Antwortsätze: jeweils -1 Punkt pro Teilaufgabe	
Total Punkte	**14**

Aufgabe 5

18 Punkte

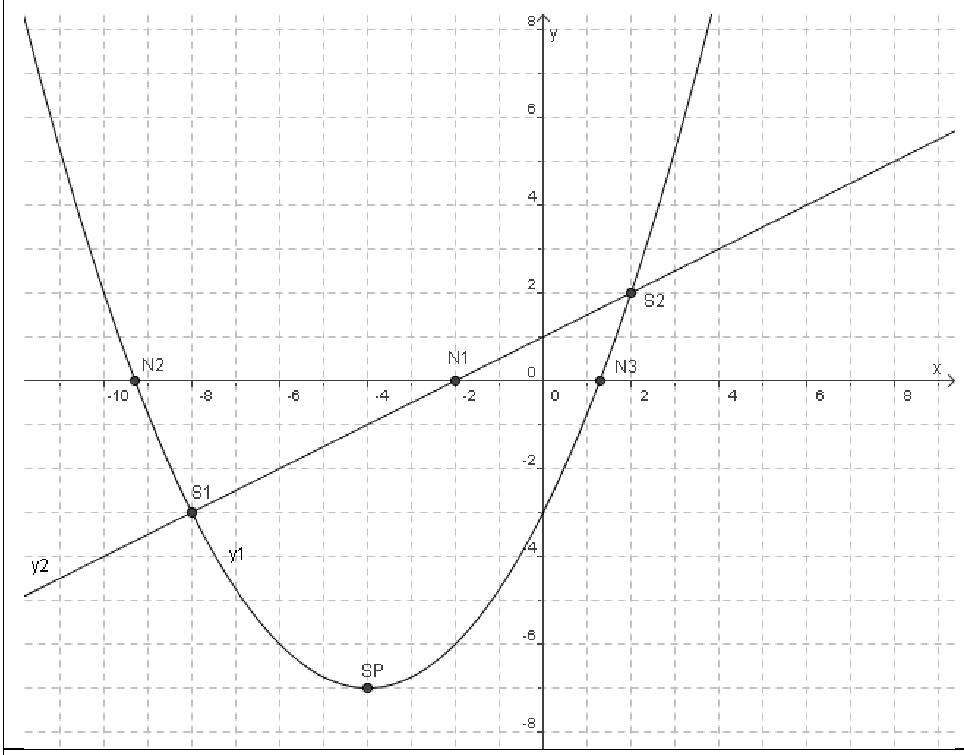
Gegeben sind folgende Funktionen: $y_1 = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 3$ und $y_2 = \frac{1}{2}x + 1$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der beiden Funktionen.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes der Parabel.

c) Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen in ein Koordinatensystem ein wobei die in den Teilaufgaben a) und b) bestimmten Punkte klar ersichtlich sein müssen.

d) Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Funktionen.

	Teilpunkte
Teilaufgabe a) Nullstellen der Parabel: $\mathrm{x}_3 = 1.29$ und $\mathrm{x}_2 = -9.29$ oder Darstellung als Punkte $\mathrm{N}_3(1.29/0)$ und $\mathrm{N}_2(-9.29/0)$ Nullstelle der linearen Funktion: $\mathrm{x}_1 = -2$ oder $N_1(-2/0)$	**4** **2**
Teilaufgabe b) $SP(-4/-7)$	**2**
Teilaufgabe c)  	**6**
Teilaufgabe d) Bestimmen der x-Koordinaten durch Lösen der quadr. Gleichung: $x_1 = -8; x_2 = 2$ Berechnen der zugehörigen y-Koordinaten und Darstellung als Punkte: $\Rightarrow S_2(2/2)$ $\Rightarrow S_1(-8/-3)$	**2** **1** **1**
Gesamtpunktzahl	***18***

Aufgabe 6

10 Punkte

Simone hat bei der Bank Gier ein Guthaben von CHF 120'000.—, das zu 2.1% verzinst wird.
Andrea hat bei der Bank Raff Guthaben von CHF 95'000.—, das zu 2.6% verzinst wird.

a) Wie viel Geld hat Simone nach 20 Jahren auf ihrem Konto?
b) In wie vielen Jahren wird Andrea CHF 200'000.—auf ihrem Konto haben?
c) Wann werden beide gleichviel auf Ihrem Konto haben? Runden Sie auf ein Jahr genau.

Lösungsvorschlag:

	Teilpunkte
Teilaufgabe a) $K_{20} = 120'000 \cdot 1.021^{20} = 181'842.80$ „Simone hat dann CHF 181'842.80 auf dem Konto."	**2**
Abzug: wenn Antwortsatz fehlt: -1 Punkt	
Teilaufgabe b) $n = \frac{\log(200'000) - \log(95'000)}{\log(1.026)} = 29.0$ „Andrea wird in 29 Jahren CHF 200'000 auf dem Konto haben."	**2**
Abzug: wenn Antwortsatz fehlt: -1 Punkt	
Teilaufgabe c) Ansatz der Exp.gleichung formulieren: $120'000 \cdot 1.021^{x} = 95'000 \cdot 1.026^{x}$	**2**
Algebraische Lösung: $x = \frac{\log\left(\frac{120000}{95000}\right)}{\log\left(\frac{1.026}{1.021}\right)}$	**2**
➔x=47.82 „Nach rund 48 Jahren haben beide rund gleichviel auf dem Konto."	**2**
Abzug: wenn Antwortsatz fehlt: -1 Punkt	
Gesamtpunktzahl	***10***

Aufgabe 7

14 Punkte

a) Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

$\frac{(a\sqrt{18}-\sqrt{8})^2}{6a-4}$	Lösung: 3a-2	2 Punkte

b) Vereinfachen Sie den gegebenen Term so weit wie möglich.

$\frac{a-a^2}{a^2+2a}:\frac{a^2-1}{a^2-4}$	Lösung: $\frac{2-a}{a+1}$	2 Punkte

c) Vereinfachen Sie den Wurzelterm so weit wie möglich.

$\sqrt[4]{x^2\cdot\sqrt[3]{x^6}}$	Lösung: x	2 Punkte

d) Vereinfachen Sie den gegebenen Term so weit wie möglich.

$\frac{a^3}{a^{n+1}}-\frac{a}{a^{n-1}}$	Lösung: 0	2 Punkte

e) Vereinfachen Sie den gegebenen Term so weit wie möglich.

$\frac{(18b^2-27b)^2}{9b^2}$	Lösung: $9(2b-3)^2$	2 Punkte

f) Bestimmen Sie x der folgenden Gleichung in $\mathbb{G}=\mathbb{R}$.

$8^{x+1}:0.25^x=\sqrt{2}$	Lösung: $\mathbb{L}=\{-0.5\}$	2 Punkte

g) Bestimmen Sie x der folgenden Gleichung in $\mathbb{G}=\mathbb{R}$.

$3\cdot\log_n\left(\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n}\right)=x$	Lösung: $\mathbb{L}=\{-1\}$	2 Punkte

Pro Teilaufgabe a) bis g) je 2 Punkte: Total 14 Punkte

Aufgabe 8

16 Punkte

In einem Kräuterladen soll eine Kräutermischung für Pizzas hergestellt werden. Sie soll aus getrocknetem Basilikum und Oregano gemischt werden. Insgesamt soll höchstens 5kg Kräutermischung entstehen.
Damit der Geschmack des Basilikums nicht überhand nimmt, darf höchstens 4 kg Basilikum verwendet werden. Von einer anderen Mischung sind noch 1.5kg getrockneter Oregano vorhanden, der aufgebraucht werden muss.
Für eine ausgewogene Mischung muss die Mischung aus mindestens 30% Basilikum bestehen.
Es seien x = Anzahl kg getrocknetes Basilikum und y = Anzahl kg getrockneter Oregano.

Teilaufgabe a

Stellen Sie das lineare Programm auf **(keine Grafik!).**

Lösungsvorschlag:

Teilaufgabe a)	Teilpunkte
$x+y \le 5$	1
$x \le 4$	1
$y \ge 1.5$	1
$0.3(x+y) \le x$	2
Total Teilaufgabe a)	**5**

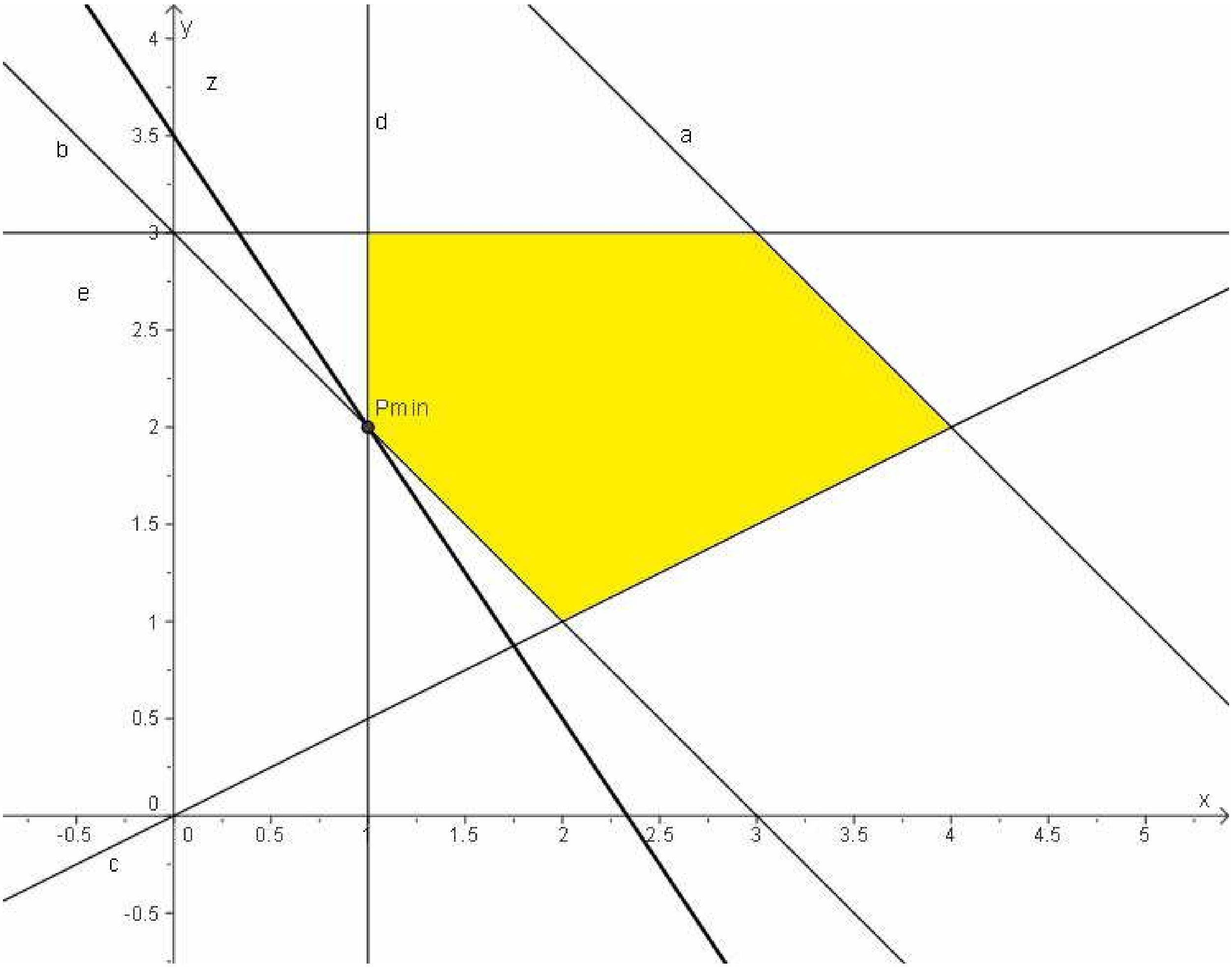
Teilaufgabe b

Im nächsten Monat wird die Kräutermischung aufgrund von Rückmeldungen der Kunden verändert. Das lineare Programm ändert sich wie folgt:

(a) $x + y \le 6$
(b) $x + y \ge 3$
(c) $4x \le 8y$
(d) $x \ge 1$
(e) $y \le 3$

Das Basilikum kostet pro 100g CHF 3.–, der Oregano pro 100g CHF 2.–. Bestimmen Sie die Zielfunktion, wenn die Kosten minimal sein sollen. Zeichnen Sie das Planungspolygon und die Zielfunktion ein (beiliegendes Millimeterpapier benützen).

Teilaufgabe b)	Teilpunkte
Zielfunktion richtig formuliert und gezeichnet: z=30x+20y 5 Grenzgeraden korrekt eingezeichnet: je 1 Punkt	**2** **5**
Abzüge: • Planungspolygon fehlt:-1 Punkt • P_{min} fehlt in Grafik: -1 Punkt • Pro falsche Gerade: -1 Punkt • Skalen, Achsenbeschriftungen fehlen: -2 Punkte • Funktions-Beschriftungen unvollständig: 1 Gerade nicht beschriftet: -1 Punkt 2 Geraden nicht beschriftet: -2 Punkte 3 Geraden oder mehr nicht beschriftet: -3 Punkte	
Total Teilaufgabe b)	**7**



x = Anzahl kg getrocknetes Basilikum und y = Anzahl kg getrockneter Oregano

Teilaufgabe c

Wie viel muss von jeder Kräutersorte genommen werden, damit die Kosten der Mischung minimal werden?

Teilaufgabe c)	Teilpunkte
rechnerisch oder grafisch: P_{min} (1/2) Zielgerade z_{min} muss durch P_{min} gehen und ersichtlich sein. Antwortsatz: „Man muss 1 kg Basilikum und 2 kg Oregano nehmen.“	**2**
wenn Antwortsatz fehlt: -1P Abzug	
Total Teilaufgabe c)	**2**

Teilaufgabe d

Wie viel kostet die Mischung dann pro 100g?

Teilaufgabe d)	Teilpunkte
Z_{min} =(30+40)/30=2.333; Antwortsatz: „100 g der Mischung kosten CHF 2.35.“	**2**
Abzüge: Folgefehler beachten. Wenn P_{min} falsch, daraus aber z richtig berechnet ist: Punkte geben. wenn Antwortsatz fehlt: -1P Abzug	
Total Teilaufgabe d)	**2**